



ESTADO DE RORAIMA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA – UERR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS - PPGEC

**A ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA E A FORMAÇÃO POR
ETAPAS MENTAIS DE GALPERIN NA APRENDIZAGEM DE
DERIVADAS PARCIAIS DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA, MODALIDADE A DISTÂNCIA, DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE RORAIMA**

PRISCILA FEITOZA BEZERRA SAMPAIO

Dissertação de Mestrado
Boa Vista/RR, Setembro de 2015



PRISCILA FEITOZA BEZERRA SAMPAIO

**A ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA E FORMAÇÃO POR
ETAPAS MENTAIS DE GALPERIN NA APRENDIZAGEM DE
DERIVADAS PARCIAIS DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA, MODALIDADE A DISTÂNCIA, DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE RORAIMA**

Dissertação apresentada a Universidade Estadual de Roraima - UERR, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências.

Linha de pesquisa: Métodos Pedagógicos e Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências

Orientador: Prof. DSc.
Hector José Garcia Mendoza

SAMPAIO, Priscila Feitoza Bezerra,

Título: A Atividade de Situações Problema e a Formação por Etapas Mentais de Galperin na aprendizagem de Derivadas Parciais do Curso de Licenciatura em matemática, modalidade a distância, da Universidade Federal de Roraima.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Aprovado em: 25/09/2015

Banca Examinadora

Prof. DSc. Hector José Garcia Mendoza
Instituição: Universidade Federal de Roraima - UFRR
Orientador

Prof. DSc. Oscar Tintorer Delgado
Instituição: Universidade Estadual de Roraima - UERR
Membro Interno

Prof. DSc. Luciano Ferreira Silva
Universidade Federal de Roraima - UFRR
Membro Externo

Boa Vista - RR
2015

Copyright © 2016 by Priscila Feitoza Bezerra Sampaio

Todos os direitos reservados. Está autorizada a reprodução total ou parcial deste trabalho, desde que seja informada a **fonte**.

Universidade Estadual de Roraima – UERR
Coordenação do Sistema de Bibliotecas
Multiteca Central
Rua Sete de Setembro, 231 Bloco – F Bairro Canarinho
CEP: 69.306-530 Boa Vista - RR
Telefone: (95) 2121.0946
E-mail: biblioteca@uerr.edu.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S192s

Sampaio, Priscila Feitoza Bezerra.

Sequência Didática: A Atividade de Situações Problema e a Formação por Etapas Mentais de Galperin na Aprendizagem de Derivadas Parciais. / Priscila Feitoza Bezerra Sampaio. – Boa Vista: Universidade Estadual de Roraima – UERR, 2015.
256f.; 30 cm;

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Estadual de Roraima, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Orientador: Prof. DSrº Hector José Garcia Mendoza.

1. Atividade de situações problema. 2. Teoria de formação por etapas das ações mentais. 3. Ensino aprendizagem. 4. Derivadas parciais. I. Mendoza, Hector José Garcia (Orient.) II. Universidade Estadual de Roraima – UERR, Mestrado em Ensino de Ciências. III. Título.

CDD.: 516.3

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária
Kethllen Gomes Barroso - CRB- 11/760

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Senhor Jesus, dono de toda a sabedoria, entendimento e conhecimento, ao meu esposo (Frankeslane Sampaio Barbosa) e a meus pais (Basílio Bezerra e Aldeize Feitoza Bezerra) que me apoiaram nesta caminhada de concretização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Senhor Jesus, por esta bênção concedida de ter participado do Curso de Mestrado profissional em Ensino de Ciências.

Aos meus pais Basílio Bezerra e Aldeize Feitoza Bezerra, que me ensinaram a prosseguir em busca dos objetivos por meio do ensino da palavra e suas orações.

Ao meu esposo Frankeslane Sampaio Barbosa, pela paciência, investimento e por acreditar na realização deste sonho.

Aos meus sogros Nilson Monteiro e Francisca de Souza pelo incentivo e cuidado ofertados durante esta caminhada.

Aos professores e equipe da coordenação técnica do PPGEC que receberam e acompanharam os mestrandos da turma de 2013.1, especial agradecimento para o Prof. Oscar Tintorer e Evandro Ghedin.

Ao meu orientador professor Héctor José Garcia Mendoza, pela dedicação, incentivo e compromisso durante todo o período do curso.

À Professora Solange Almeida dos Santos sua ajuda e horas de dedicação na leitura deste trabalho.

Aos colegas de turma Ronaldo Nunes, Jamilly e Geami pela amizade companheirismo no desenvolvimento das atividades em equipe e ideias colaborativas.

O conhecimento humano só existe porque tem um fundamento, um ser supremo que o concebeu e o concedeu ao homem, levando o assim a obtenção do aprendizado como forma de sua sobrevivência neste planeta.

Priscila Feitoza Bezerra Sampaio

RESUMO

Esta investigação se desenvolveu baseada em uma teoria da aprendizagem, estratégia metodológica e um conteúdo matemático como objeto de estudo visando à aprendizagem dos estudantes. Teve como objetivo analisar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de derivadas parciais na disciplina de cálculo III do 5º semestre do curso de licenciatura em Matemática, modalidade a distância, na Universidade Federal de Roraima, fundamentada na Atividade de Situações Problema (ASP) utilizando a resolução de problema como metodologia de ensino e a teoria de formação por etapas das ações mentais. Nessa perspectiva, a pesquisa teve como base teórica a teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin, atividade de situações problema, como uma estratégia de ensino, a qual pôde ser utilizada como metodologia de ensino, a direção da atividade de estudo, a didática da atividade de situações problema. Prosseguindo com o conteúdo de derivadas parciais, houve a construção da atividade de situações problemas em derivadas parciais e suas aplicações. Os procedimentos metodológicos foram desenvolvidos através da pesquisa mista (qualitativa e quantitativa) com o enfoque qualitativo como predominante, na busca de explicar o desempenho dos estudantes de maneira individual nos três momentos: avaliação diagnóstica, formativa e final. Na qualitativa as ações e operações da Atividade de Situações problema foram representadas por categorias, no quantitativo, foram convertidas em variáveis. A amostra esteve composta por um grupo de nove estudantes do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFRR em funcionamento no Polo da Universidade Virtual de Roraima no município de Alto Alegre. Na coleta de dados, foram utilizados como instrumentos a observação direta, a prova de lápis e papel, videoconferência e aulas presenciais para realização da análise; a validade da pesquisa foi verificada por meio dos instrumentos e do desenvolvimento da pesquisa de maneira rigorosa, a qual garantiram a veracidade do resultado. As análises foram realizadas de acordo com os três momentos da Atividade de Situações Problemas da Didática em derivadas parciais, a Atividade de Situações Problemas em derivadas parciais e as etapas mentais. Os resultados descrevem a assimilação dos estudantes no conteúdo estudado conforme a ação essencial da ASP que foi escolhida para cada problema matemático, como também, as cinco etapas qualitativas de Formação das Ações Mentais iniciando com a base orientadora da ação até a linguagem interna, a motivação se faz presente durante todo este percurso da atividade externa até a interna. As conclusões obtidas com o resultado apresentam que conforme perpassava-se o processo de ensino-aprendizagem era possível perceber a obtenção de conhecimento pelos estudantes de forma expressiva na assimilação do conceito de derivadas parciais e suas aplicações.

Palavras-chaves: Atividade de Situações Problema. Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais. Ensino Aprendizagem. Derivadas Parciais.

RESUMEN

Esta investigación se desarrolló basada en una teoría del aprendizaje, estrategia metodológica y un contenido matemático como objeto de estudio visando el aprendizaje de los estudiantes. Tuvo como objetivo analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido de derivadas parciales en la asignatura del cálculo III del 5° semestre del curso de licenciatura en Matemática, modalidad a distancia, en la Universidad Federal de Roraima, fundamentada en la actividad de Situaciones Problema utilizando la resolución del problema como metodología de enseñanza y la teoría de formación por etapas de las acciones mentales. En esta perspectiva la investigación tuvo su base teórica en la teoría de formación por etapas de acciones mentales de Galperin, actividad de situaciones problema, como estrategia de enseñanza, en la cual pudo ser utilizada como metodología de enseñanza, en la dirección de la actividad de estudio, la didáctica de la actividad de situaciones problemas. Prosiguiendo con el contenido de derivadas parciales, la construcción de la actividad de situaciones problemas en derivadas parciales y sus aplicaciones. Los procedimientos metodológicos fueron desarrolladas a través de la investigación mista (cualitativa y cuantitativa) con el enfoque cualitativo como predominante, en la busca de explicar el desempeño de los estudiantes de manera individual en los tres momentos: evaluación diagnóstica, formativa y final. En la cualitativa las acciones y operaciones de la actividad de Situaciones problemas fueron representadas por categorías, en el cuantitativo, fueron convertidas en variables. La muestra estuvo compuesta por un grupo de nueve estudiantes del curso de Licenciatura en Matemática a Distancia de la UFRR en funcionamiento en el Polo de la Universidad Virtual de Roraima en el municipio de Alto Alegre. En la colecta de datos fueron utilizados como instrumentos la observación directa, la prueba de lápiz y hoja, vídeo conferencia y clases presenciales para realización de análisis, la validez de investigación fue verificada por medio de los instrumentos y del desarrollo de la investigación de manera rigurosa, en la cual garantizaron la veracidad del resultado. Las análisis fueron realizadas de acuerdo con los tres momentos de la actividad de Situaciones Problemas de la Didáctica en derivadas parciales, La actividad de Situaciones Problemas en derivadas parciales y las etapas mentales. Los resultados describen la asimilación de los estudiantes en el contenido estudiado conforme la acción esencial da ASP que fue escogida para cada problema matemático, como también, las cinco etapas cualitativas de Formación de las Acciones Mentales Iniciando con la base orientador de la acción hasta el lenguaje interna, la motivación se hace presente durante todo este recorrido de la actividad externa hasta la interna. Las conclusiones obtenidas con el resultado presentan que conforme se perpasava el proceso de enseñanza aprendizaje era posible percibir la obtención del conocimiento por los estudiantes de forma expresiva en la asimilación del concepto de derivadas parciales e sus aplicaciones.

Palavras-chaves: Actividad de Situaciones problema. Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales. Enseño Aprendizaje. Derivadas Parciales.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Esquema 1 - O Desdobramento da Atividade	25
Esquema 2 - Características das Ações	27
Esquema 3 - Direção da ASP.....	42
Esquema 4 - Conhecimentos Básicos de Derivação.....	47
Esquema 5 - Conhecimentos Básicos de Derivada Parcial.....	48
Esquema 6 - Momento Geral da Pesquisa.....	59
Figura 1 - Procedimentos da Teoria Fundamentada.....	63
Esquema 7 - Aplicação do Sistema de Ações.....	65
Esquema 8 - Dimensão das Variáveis no Quantitativo.....	66
Esquema 9 - Variáveis e Sistema de Ações.....	66
Figura 2 - Fase da Pesquisa.....	68
Figura 3 - Problemática da Pesquisa.....	69
Figura 4 - Estrutura do estudo de caso.....	70
Figura 5 - Processo de Coleta de Dados.....	72
Figura 6 - Instrumentos de coleta de dados.....	73
Gráfico 1 - Média de Desempenho da Terceira Ação da Avaliação Diagnóstica.....	109
Gráfico 2 - Média de Desempenho da Quarta Ação da Avaliação Diagnóstica.....	110
Gráfico 3 - Média de Desempenho da Terceira Ação da Avaliação Formativa.....	119
Gráfico 4 - Média de Desempenho da Quarta Ação da Avaliação Formativa.....	120
Gráfico 5 - Média de Desempenho da Terceira e Quarta Ação da Avaliação Final.....	125
Gráfico 6 - Média de Desempenho Geral da Terceira Ação nas Três Avaliações.....	126
Ilustração 1 - Representação do Modelo.....	133
Ilustração 2 - Representação do Modelo.....	138
Ilustração 3 - Representação do Modelo.....	139

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Previsão do Tempo norte-americano.....	49
Tabela 2 - Categorias da Pesquisa Qualitativa.....	61
Tabela 3.- Análise da Avaliação Diagnóstica.....	78
Tabela 4 - Análise da Avaliação Formativa.....	78
Tabela 5 - Análise da Avaliação Final.....	79
Tabela 6 - Plano de Ensino.....	92
Tabela 7 - Análise de Desempenho do Aluno (A-01) no Problema (P-01).....	101
Tabela 8 - Análise de Desempenho do Aluno (A-01) no Problema (P-02).....	103
Tabela 9 - Resultado do Nível de Partida.....	105
Tabela 10 - Resultado da Avaliação Formativa.....	114
Tabela 11 - Resultado da Avaliação Final.....	123
Tabela 12 - Resumo do Resultado da Fase Formativa.....	143

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Característica da Base Orientadora.....	30
Quadro 2 - Características das Ações.....	33
Quadro 3 - A Atividade de Situações Problema.....	42
Quadro 4 - Os três momentos da ASP da Didática da Matemática.....	54
Quadro 5 - Níveis de Categorias Qualitativas.....	61
Quadro 6 - Modelo de Desempenho das Ações de Acordo com as Etapas Verbal Externa e Linguagem Externa.....	62
Quadro 7 - Modelo Desempenho das Ações de Acordo com a Etapa Mental.....	62
Quadro 8 – Processo de Intervenção.....	64
Quadro 9 – Característica da variável quantitativa.....	67
Quadro 10 - Parâmetros do Problema 1.....	74
Quadro 11 - Parâmetros do Problema 2.....	75
Quadro 12 - Parâmetros do Problema 3.....	76
Quadro 13 - Parâmetros do Problema 4.....	77
Quadro 14 – Instrumento de Análise da Solução dos Problemas.....	80
Quadro 15 - Guia de Observação.....	81
Quadro 16 - Base Orientadora da Ação em Derivadas Parciais.....	127

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
CAPÍTULO 1 A ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA EM MATEMÁTICA	22
1.1 TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS	22
1.1.1 Conceito de Atividade.....	24
1.1.2 Características das Ações.....	26
1.1.3 A Base Orientadora da Ação.....	29
1.1.4 Processo de Assimilação	31
1.1.5 Direção da Atividade de Estudo	34
1.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMA COMO METODOLOGIA DE ENSINO NO CONTEÚDO DE DERIVADAS PARCIAIS	35
1.2.1 O Conceito de Derivadas Parciais e suas Aplicações.....	37
1.2.2 Atividade de Situações Problema em Matemática	41
1.2.3 A Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais	43
1.2.4 O Processo de Assimilação e a Direção da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais.....	44
1.2.5 Exemplos da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais	46
1.2.6 A Atividade de Situações Problema da Didática em Matemática	53
CAPÍTULO 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	57
2.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.....	57
2.2 MODELOS DA PESQUISA.....	60
2.2.1 Pesquisa Qualitativa	60
2.2.2 Pesquisa Quantitativa	63
2.2.3 Pesquisa Mista	67
2.3 AMOSTRA.....	71
2.4 COLETA DE DADOS	71
2.4.1 Instrumentos	72
2.4.2 Provas de Lápis e Papel.....	73
2.4.3 Formulário de Análise	79
2.4.4 Observação	81
2.5 VALIDADE DA PESQUISA	82
CAPÍTULO 3 RESULTADOS E ANÁLISES.....	85

3.1 MOMENTOS DA ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA DA DIDÁTICA EM DERIVADAS PARCIAIS	85
3.1.1 Momento 1: Identificar a ASP em Derivadas Parciais	85
3.1.2 Momento 2: Planejar a ASP em Matemática.....	90
3.1.3 Momento 3: Construir a ASP em Matemática.....	91
3.2 RESULTADOS DOS INSTRUMENTOS	100
3.2.1 Identificação do Nível de Partida para o Estudo de Derivadas Parciais.....	100
3.2.2 Desempenho da Assimilação da Avaliação Formativa	111
3.2.3 Desempenho da Assimilação da Avaliação Final em Derivadas Parciais.....	121
3.3 DESCRIÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS EM DERIVADAS PARCIAIS	127
3.3.1 Base Orientadora da Ação	127
3.3.2 Formação da Ação Materializada	132
3.3.3 Formação da Ação Verbal Externa.....	133
3.3.4 Formação da Ação em Linguagem Externa para si.....	135
3.3.5 Formação da Ação em Linguagem Interna	138
3.3.6 Análise da Assimilação do Conceito de Derivadas Parciais Fundamentada na Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais	140
3.3.7 Análise da Contribuição da Atividade de Situações Problemas aos Estudantes.....	145
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
REFERÊNCIAS	150
APÊNDICE	154
APÊNDICE A - Exemplos de Problemas no Modelo da Atividade de Situações Problemas em Derivadas Parciais	154
APÊNDICE B - Regras Básicas no Nível de Partida e as Propriedades Essenciais em Derivadas Parciais.....	156
APÊNDICE C - Síntese do Desempenho dos Alunos (a-02 até a-09) na Fase Diagnóstica..	157
APÊNDICE D - Síntese do Desempenho do Aluno (a-02 até a-09) na Fase Formativa.....	158
APÊNDICE E - Síntese do Desempenho dos Alunos (a-02 até a-09) na Fase Final	159
APÊNDICE F - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos no Nível de Partida.....	160
APÊNDICE G - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos na Avaliação Formativa.....	188

APÊNDICE H - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos na Avaliação Final.....	206
ANEXOS	242
ANEXO A- Prova de Lápis e Papel Formativa (Problemas)	242
ANEXO B - Prova de Lápis Final (Problemas)	243
ANEXO C - Ementa da Disciplina de Cálculo III.....	245
ANEXO D - Solução dos Problemas do Nível de Partida.....	246
ANEXO E - Solução dos Problemas da Avaliação Formativa.....	249
ANEXO F - Solução dos Problemas da Avaliação Final	252

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve suas origens a partir da disciplina de Didática da Matemática e Estágio Supervisionado durante a graduação, que permitiram conhecer as bases da resolução de problemas matemáticos, a atividade de situações problema e a teoria formação por etapas das ações mentais de Galperin, que se discutia o ensino da matemática por meio da resolução de problemas e o uso de uma teoria e/ou estratégia de aprendizagem no estudo da matemática. No entanto, essa discussão foi aprofundada após o ingresso no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, em que se buscou o conhecimento abrangente sobre o tema. Assim, se passou a pensar em como contribuir com o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática a distância, uma vez que nesta modalidade de ensino, as aulas presenciais têm uma carga horária reduzida.

Este contexto levou à escolha do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a Distância para a realização da pesquisa, em que se identificou a disponibilidade da disciplina de Cálculo III, no primeiro semestre de 2014 do referido curso ofertado pela Universidade Federal de Roraima (UFRR), no qual as aulas são ministradas no Polo da Universidade Virtual de Roraima (UNIVIRR) devido à parceria entre estas instituições.

Uma vez que os polos de apoio presencial da Universidade Aberta do Brasil em Roraima encontram-se na responsabilidade do Governo do Estado, mas precisamente, da UNIVIRR, a qual está vinculada à Secretaria Estadual de Educação - SEED, apresenta como missão a viabilização da Educação a Distância em todos os níveis de ensino, preferencialmente de nível superior, através de recursos tecnológicos e mídias educacionais adequadas que possibilitem o ensino e aprendizagem com tecnologia moderna, nos 15 polos, sendo um em cada município do Estado de Roraima (PPP, 2013).

Referente à UFRR, esta foi implantada no Estado de Roraima no final do ano de 1989, quatro anos após ter sido autorizada pela Lei nº 7.364/85. Destaca-se como a primeira Instituição Federal de Ensino Superior a instalar-se no Estado, sendo considerada uma das mais novas do País. Há vinte e seis anos vem produzindo e disseminando conhecimentos, trabalhando na busca contínua de padrões de excelência e de relevância no ensino, na pesquisa e na extensão (UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA, 2015).

Neste trabalho, defende-se a ideia de que no ensino é importante utilizar teorias vinculadas ao conteúdo que se propõe ministrar aos estudantes. Entretanto, o que se percebe frequentemente é a resistência dessa vinculação pelos professores que desconhecem esta face da ciência na aprendizagem. Alguns professores fazem uso de ferramentas da didáticas

relacionadas ao conteúdo das disciplinas ministradas de forma implícita, como no caso da matemática, sem se dar conta de seu envolvimento neste contexto. Desse modo, para que a aprendizagem dos estudantes ocorra com qualidade e o trabalho do professor seja satisfatório, faz-se necessário buscar uma didática fundamentada em teorias de aprendizagem que permitam fazer confluência com as diversas áreas da matemática. Como por exemplo, o professor pode fazer uso de problemas matemáticos no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, levando-os a estudar com um olhar voltado para a realidade do mundo que o cerca, por meio de problemas que os ajude preparar e resolver as circunstâncias do seu dia a dia.

Nesse sentido, a Atividade de Situações Problema (ASP) e as etapas de formação das ações mentais, apresentam sua contribuição no ensino-aprendizagem por meio de problemas contextualizados. Desta forma, na busca de contribuir com a educação a distância, levando-se em conta as dificuldades que enfrentam os estudantes desta modalidade de ensino, devido ao processo de ensino-aprendizagem ocorrer na maior parte do tempo de maneira independente e a participação do professor se apresentar de forma menos incisiva, caracterizando-se assim, um distanciamento na relação direta professor-aluno.

A pesquisa foi realizada dentro do curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFRR de forma a cooperar com a qualidade do conhecimento da educação nesta modalidade. Sendo assim, este utiliza a tecnologia de forma a favorecer a educação, dando significado à educação de base do Estado de Roraima, pois tem como finalidade qualificar e ampliar a quantidade de professores licenciados em matemática e assim atender à demanda das escolas.

No curso de Matemática a distância, sua carga-horária está organizada na proporção de 70% a distância e 30% presencial. Desse modo, o curso possibilitou a realização de aulas presenciais, aplicação de provas e observação na pesquisa. O estudo foi aplicado com os estudantes do 5º semestre, matriculados na disciplina de cálculo III no conteúdo de derivadas parciais.

A pesquisa encontra-se fundamentada nos estudos da teoria sócio-cultural de Vygotsky e seus colaboradores, o qual afirma que o desenvolvimento de assimilação da *psique* do homem é dado pela experiência social. Segundo Leóntiev o sujeito interage por meio da atividade, desse modo, converteu a atividade que relaciona o sujeito com o mundo em objeto da psicologia, identificando o conceito de atividade, ação e operação. A partir dessas ideias, Galperin desenvolveu a teoria de formação por etapas das ações mentais e todo esse contexto de teorias surgiu no progresso da ciência pedagógica soviética. Nesta perspectiva a investigação tem como objeto o conteúdo de derivadas parciais, que a partir da atividade dividida em etapas qualitativas

fazendo uso da resolução de problemas matemáticos, a qual deverá ser internalizada pelos sujeitos, os estudantes de Licenciatura em Matemática.

A Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin abarcou a realização de um planejamento adequado à realidade dos estudantes por meio da Base Orientadora da Ação (BOA). Nesse sentido, as etapas mentais estiveram presentes durante todo desenvolvimento das aulas, o qual os estudantes foram orientados pelo professor de maneira a percorrer as cinco etapas mentais externa até a internalização do conteúdo estudado.

A Teoria Geral da Direção em sua forma cíclica trouxe contribuição neste trabalho com a assimilação da aprendizagem pelos estudantes, conduzida pela metodologia do professor no processo de ensino-aprendizagem.

A ASP em Matemática compôs também a fundamentação da pesquisa em questão, por se tratar de uma estratégia de ensino, a qual sua utilização foi de suma importância no processo de ensino-aprendizagem, de forma a detectar a aprendizagem dos estudantes, visto que, por meio das ações e operações da ASP, os mesmos foram ensinados, através do estudo da matemática por meio de problemas, pois esta estratégia possibilitou a compreensão do problema, a construção do modelo, a solução do modelo e a interpretação da solução do modelo matemático.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu dentro da disciplina de Cálculo III, no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações. A Atividade de Situação Problema da Didática contribuiu para a apresentação de uma estrutura na qual se planejou a disciplina e os planos de aulas de forma adequada com os três momentos desta didática: identificar a Situação Problema da Didática da Matemática no conteúdo de derivadas parciais; planejar e construir a Atividade de Situações Problema.

No desdobramento da pesquisa, a construção dos planos de aulas de acordo com as ações e operações da ASP foram elaborados como forma de contribuir na prática dos professores de matemática que atuam na educação a distância, por se apresentar de maneira detalhada, possibilitando ao estudante compreender o assunto com destreza, devido este não ter sempre a presença do professor à sua disposição nesta modalidade de ensino. Além, de poder contribuir também nas aulas do ensino presencial e no ensino de outras pesquisas, embasada nas teorias evidenciadas, a pesquisa apresenta a seguinte pergunta:

A aplicação da Atividade de Situações Problema no ensino do conteúdo de derivadas parciais do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD, fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais, produz aprendizagem dos alunos da Universidade Federal de Roraima?

A resposta foi obtida a partir de uma metodologia mista, ou seja, com enfoque qualitativo de forma a explicar o desempenho dos estudantes no processo de ensino e de aprendizagem da ASP em derivadas parciais; o enfoque quantitativo triangulou com qualitativo para a explicação do resultado da análise do desempenho dos estudantes na aprendizagem.

Firmando-se assim, o objetivo geral da investigação: *Analisar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de derivadas parciais na disciplina de Cálculo III do 5º semestre do curso de licenciatura em Matemática, modalidade a distância, na Universidade Federal de Roraima, fundamentada na Atividade de Situações Problema, utilizando a resolução de problema como metodologia de ensino e a teoria de formação por etapas das ações mentais.*

Em paralelo com o objetivo geral, na pesquisa são considerados os seguintes objetivos específicos:

- *Diagnosticar o nível de partida dos estudantes na resolução de problemas no conteúdo de derivadas parciais;*
- *Analisar o efeito da sequência didática na resolução de problema no conteúdo de derivadas parciais segundo a Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin;*
- *Descrever o desempenho dos estudantes na formação das ações mentais.*

A amostra não-probabilística foi composta por um grupo de 09 estudantes pertencentes ao curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFRR em funcionamento no Polo da UNIVIRR no município de Alto Alegre. Os instrumentos usados na coleta foram a observação direta, descrição comportamental, visita em campo, prova de lápis e papel e videoconferência, que permitiram analisar os resultados e assim avaliar o desempenho cognitivo dos alunos por meio da ASP. Com todo o trabalho desenvolvido, tornou-se possível a realização da análise dos dados coletados e a descrição do resultado da pesquisa.

A pesquisa apresenta fundamento metodológico que contém todos os elementos necessários à sua realização. O método misto contribuiu para a obtenção da explicação e análise no enfoque qualitativo e quantitativo, durante a execução da pesquisa, o que perpassou pelo planejamento, execução e resultados.

Destaca-se que os resultados pertencentes a este trabalho encontram-se expressos a partir dos métodos e instrumentos escolhidos e utilizados para análise. Na busca de que se compreenda com clareza todos os passos deste estudo, se faz necessário ressaltar que o foco desta pesquisa está relacionado ao processo de ensino-aprendizagem, o que levou à elaboração de um produto final, mas precisamente a criação de um livreto da sequência didática da ASP em Derivadas Parciais.

O trabalho está estruturado em três capítulos. O primeiro capítulo refere-se ao contexto histórico do surgimento da teoria por etapas das ações mentais de Galperin, prosseguindo com o conceito de atividade, ação e operação; às características das ações dependentes e independentes que apresentam grande relevância na compreensão e utilização das etapas mentais. A base orientadora da ação que permite formular ações necessárias que executadas levam ao resultado final da ação, seguindo com o trabalho de Galperin destacando como ocorreu a assimilação do conhecimento, em que as ações externas contribuem para a internalização da ação. A direção da atividade de estudo de Talízina com seus dois tipos de direção: isolada e cíclica, em que a cíclica se destaca por ser mais eficaz.

Por conseguinte, descreve-se a resolução de problema como metodologia de ensino, iniciando com o contexto histórico das primeiras ideias sobre resolução de problemas, destaca-se o conceito de derivadas parciais. Segue-se com ASP em matemática, que é uma estratégia para resolver problemas matemáticos, a atividade de situações problema no conteúdo de derivadas parciais construídas a partir da ASP. Evidencia-se o processo de assimilação nas etapas mentais e a direção da atividade, elaborado de acordo com o assunto de derivadas parciais que se encontra presente durante todo o processo de ensino-aprendizagem. Nos exemplos da ASP em derivadas parciais, primeiramente, destacam-se algumas áreas em que se utiliza a taxa de variação, seguindo com os conhecimentos básicos necessários para resolver a derivada e alguns exemplos de problemas matemáticos utilizados na pesquisa resolvidos por meio do passo a passo da ASP. Por fim, tem-se a atividade de situações problema da didática da matemática e seus três momentos: identificar, planejar e construir, os quais possibilitaram a elaboração deste três momentos no processo de ensino-aprendizagem desta investigação.

O segundo capítulo aborda o percurso dos procedimentos metodológicos empregados no trabalho, de forma a apresentar uma análise explicativa e descritiva dos fatos. Primeiramente abrange a caracterização da pesquisa de maneira resumida em seus quatro momentos. Os modelos da pesquisa qualitativa, quantitativa e mista destacam em seu contexto os elementos desenvolvidos por meio da ASP e das etapas das ações mentais visando descrever como ocorreu a aprendizagem dos estudantes.

Desse modo, as análises envolveram o enfoque qualitativo e quantitativo e a triangulação dos resultados do desempenho dos estudantes na aprendizagem, por meio da utilização de problemas matemáticos no conteúdo de derivadas parciais, através da ASP e das etapas mentais de Galperin.

O terceiro capítulo apresenta os resultados da pesquisa, inicia expondo os três momentos da ASP da Didática em Derivadas Parciais: identificar, planejar e construir, elaborados e

realizados no período deste estudo. Os resultados dos instrumentos dispõem-se por uma sequência específica, na qual apresenta-se a análise do teste diagnóstico na resolução dos problemas matemáticos pelos estudantes, que visava identificar o nível de partida dos estudantes para elaborar a base orientadora da ação.

Nos resultados da avaliação formativa, mostra-se a assimilação dos estudantes quanto à definição e conceito de Derivadas de funções de várias variáveis e suas aplicações nos problemas matemáticos escolhidos, de acordo com a demonstração do desempenho individual do processo. O resultado do desempenho dos estudantes na avaliação final dos quatro problemas analisados teve a atenção voltada às características das ações essenciais, assim como na fase formativa.

Destaca-se que, na triangulação, entre método e teoria as análises, apresentaram o desempenho dos estudantes nas três fases: diagnóstica, formativa e final. As etapas por ações mentais de acordo com o exposto nesta investigação, esteve presente em todo o desenvolvimento do conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações. Apresenta-se por último o resultado da análise da contribuição da ASP aos estudantes envolvidos na pesquisa.

CAPÍTULO 1 A ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA EM MATEMÁTICA

No presente capítulo serão apresentadas as bases teóricas nas quais se busca mostrar o contexto histórico da psicologia pedagógica desde Vygotsky, passando por Leóntiev, Talízina e enfatizando a teoria de Galperin como fundamento teórico principal da pesquisa. Aborda-se ainda a resolução de problema como metodologia de ensino, prosseguindo com a ASP e as derivadas parciais.

A primeira seção trata do conceito de atividade, das características das ações, da base orientadora da ação, do processo de assimilação e da direção da atividade de estudo no qual se fundamenta a teoria de formação por etapas das ações mentais.

A segunda seção evidencia o contexto histórico da resolução de problemas, o conteúdo de derivadas parciais de maneira formal, a ASP em matemática composta por ações e operações, a construção da ASP em derivadas parciais organizadas por um sistema de quatro ações. O processo de assimilação e a direção da ASP em derivadas parciais, o contexto da aplicação de derivadas parciais em exemplos de problemas estudados na pesquisa a partir da ASP, finalizando com a ASP da didática em matemática com os seus três momentos.

1.1 TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS

No período de 1920, um grupo de psicólogos soviéticos planejou o trabalho de reestruturar a ciência psicológica, tendo como base a filosofia marxista. Sendo necessário superar na psicologia o subjetivismo e o fenomenalismo, concluindo a separação da *psique* da vida real do homem como portador das relações sociais (TALÍZINA, 1988).

Compreende-se que a união deste grupo de psicólogos foi importante, pois deixaram suas contribuições por meio dos trabalhos publicados, que possibilitaram aos pesquisadores na atualidade, poder desenvolver pesquisas através das contribuições deixadas por estes estudiosos.

Este movimento foi liderado por Vygotsky o qual em sua teoria histórico-cultural considerou que o processo de assimilação da *psique* do homem é dada com base em sua própria experiência social. Nestes termos filosóficos centraram-se o princípio da unidade da *psique* e da atividade, que foi elaborada posteriormente por uma equipe de psicólogos soviéticos e que passou a constituir um dos princípios diretos desta classe de psicólogos (MENDOZA et al., 2013; TALÍZINA, 1988).

O referido contexto leva a perceber que o desenvolvimento do conhecimento humano tem como base a convivência deste com a sociedade na qual vive, em que o sujeito, pertencente ao meio, recebe influências, construindo de forma cognitiva o saber, todo este processo envolve a unidade da psique e a atividade.

Vygotsky, por meio da teoria histórico cultural, afirma que o desenvolvimento de assimilação da *psique* do homem constitui-se pela experiência social, assim ele elaborou os conceitos de “zona de desenvolvimento atual” e “zona de desenvolvimento próximo” além de estimar a educação como ciência (MENDOZA et al., 2009).

A teoria da atividade surgiu com a teoria sócio-cultural de Vygotsky, a qual declara que o homem convive no mundo por meio da atividade. De acordo com Leóntiev, esta atividade está formada por um sistema de ações com operações para alcançar um objetivo, em que o objetivo deve coincidir com a motivação do indivíduo (MENDOZA; TINTORER; CASTAÑEDA, 2009).

Posteriormente, Leóntiev transformou a atividade que relaciona o sujeito com o mundo em objeto da psicologia. Primeiramente, dedicou-se ao estudo da estrutura da atividade, também fez a diferenciação dos conceitos de atividade, ação e operação (TALÍZINA, 1988).

Por conseguinte, Galperin, baseado nos trabalhos de Vygotsky e Leóntiev destacou que os novos tipos de atividade psíquica se assimilam ao princípio na forma externa, material, e logo se transformam na forma interna psíquica. (GALPERIN, 1954 apud TALÍZINA, 1988).

Portanto o mérito de Galperin ocorreu pelo fato de não ter se limitado nas teses gerais sobre a atividade, nem simplesmente distinguiu a ação como unidade de análise da atividade psíquica. Porém, transformou a pesquisa da gênese das ações mentais (psíquicas) em método de estudo da atividade psíquica, além de planejar a tarefa de esquadrihar os modelos concretos de atividade psíquica, desde o ângulo das ações mentais que as compõem (TALÍZINA, 1988).

Conforme Talízina (1988), os estudos de Vygotsky, Leóntiev, Rubinsthéin e colaboradores apresentaram o progresso da psicologia soviética, a qual está fundamentada em três princípios: o enfoque do caráter ativo do objeto da psicologia; o reconhecimento da natureza social da atividade psíquica do homem e o reconhecimento da unidade da atividade psíquica e da atividade externa, prática.

O primeiro princípio afirma que a aproximação da atividade está baseada na *psique*, passando assim, a psicologia a estudar o sistema da atividade. Neste preceito, a *psique* está relacionada diretamente com a atividade do homem, sendo a atividade o decurso que leva o sujeito a interagir com o mundo externo e resolver problemas essenciais para a vida. As ações

realizadas pelo homem ocorrem com a prática externa e também na mente, sendo assim, a *psique* é um sistema de ações (TALÍZINA, 2000).

O segundo princípio tem como evidência a natureza social do desenvolvimento psíquico do homem. O progresso da humanidade se constitui no meio social, ou seja, o conhecimento é passado de geração a geração, o que nos leva a construção de novos conhecimentos, fazendo com que o mestre tenha o papel de repassar a experiência social a novas gerações. A assimilação da experiência das gerações passadas julgou como papel determinante do desenvolvimento do homem, o ensino e a educação como atividade essencial para compreensão das experiências das gerações passadas (TALÍZINA, 2000).

O terceiro princípio apresenta a ação como unidade de análise da aprendizagem, e tem como exigência geral na unidade de análise de qualquer ação continuada, não perder de vista o que é considerado específico do fato que se analisa. Compreende-se que no desenvolvimento da ação tem que haver unidade, ou seja, uma ação específica que irá conduzir a mente a novas ações, um ponto de partida para as construções gerais.

Desse modo, os teóricos citados contribuíram com o desenvolvimento da ciência psicológica soviética, seus estudos avançaram, no sentido de levar a outros pesquisadores a possibilidade de fazer uso destas teorias no processo de ensino-aprendizagem.

1.1.1 Conceito de Atividade

A atividade se constitui por processos pelos quais o indivíduo, se relaciona com a realidade, como resposta a suas necessidades, adotando determinada atividade em direção a mesma. No entanto, a atividade não é uma reação nem um conjunto de reações. A interação sujeito-objeto acontece em forma de atividade, é neste momento que se origina o reflexo psíquico que faz o intermédio desta interação (MAURA et al., 1995).

“Isto possibilita que pode formar-se no individuo a imagem ou representação ideal e subjetiva do objeto, e por sua vez, pode produzir a objetivação da regulação psíquica em um resultado da atividade” (MAURA et al., 1995, p. 91). No entanto, a atividade é um decurso em que sucedem transições entre os extremos sujeito-objeto em função das necessidades do primeiro.

Por intermédio da atividade de estudo, o aluno absorve os conteúdos de aprendizagem de forma subjetiva e ideal, ou seja, como conceito, juízos, princípios, etc. A partir do momento

que os conceitos explicitados são formados, o sujeito pode aplicá-los à realidade, quando as ocasiões objetivas assim os demandem (MAURA et al., 1995).

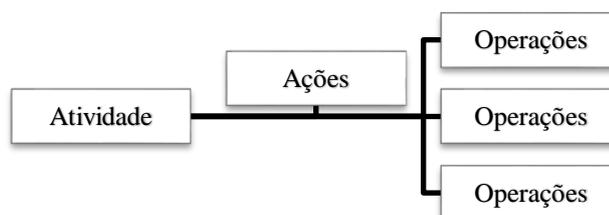
O caráter objetual da atividade,

[...] é sua característica constitutiva principal. Na atividade está implícita seu objeto. Uma atividade sem objeto não existe. Em duas formas pode representar-se o objeto da atividade: em sua existência independente do sujeito, que se relaciona com o objeto mediante sua atividade, e como reflexo psíquico do objeto, reflexo que só consegue realizar o sujeito em sua atividade com o dito objeto [...] Posto que o motivo confere a atividade da personalidade sua direção, orientação e sentido para o sujeito constituem o aspecto mais importante que distingue psicologicamente as atividades humanas entre si (MAURA et al., 1995, p. 92).

A estrutura da atividade decorre por meio de diferentes processos realizados pelo homem, que é guiado por uma representação prévia do que espera alcançar com o processo. Essas representações prévias constituem objetivos ou fins, que são conscientes. O processo que conduz aos objetivos ou fins é chamado de ação. As ações formam processos subordinados a objetivos ou fins conscientes. Nesse sentido, a atividade existe através de ações (MAURA et al., 1995).

As ações pelas quais ocorrem a atividade não decorrem de forma isolada das condições das quais a atividade é produzida. Desse modo, sendo a ação um processo que visa alcançar um objetivo ou fim consciente, as vias, procedimentos, métodos, enfim, a maneira como esse processo se realizará variará de acordo com as condições pelas quais o sujeito enfrentará para alcançar o objetivo. O (Esquema 1) “Essas vias, procedimentos, métodos, formas mediante as quais a ação transcorre com dependência das condições em que se deve alcançar o objetivo ou fim, se denominam operações” (MAURA et al., 1995, p. 94).

Esquema 1 - O Desdobramento da Atividade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, a atividade existe por meio de ações, estas se sustentam nas operações. De modo afim ao realizado com a atividade-ação, também ocorre em relação à ação-operação: uma mesma ação pode produzir-se através de diferentes operações e uma mesma operação pode formar parte de diferentes ações (MAURA et al., 1995).

Leóntiev converteu a atividade que relaciona o sujeito com o mundo em objeto da psicologia, dedicou-se ao estudo da estrutura e da atividade. Discriminou o conceito de atividade, ação e operação. Chegando à conclusão de que os principais componentes de algumas atividades humanas os constituem nas ações que as realizam, as ações são chamadas de processos subordinados a um objetivo percepção, que recebe orientação e as operações são as instruções por meio do qual se realiza a ação. Essas “operações são formadas nas ações neste caso o objeto da ação forma parte de outra ação como condição de seu cumprimento, a primeira ação se transforma em método de realização da segunda, em uma operação consciente” (TALÍZINA, 1988, p. 24).

A atividade do homem apresenta-se completamente de forma distinta, o trabalho enquanto atividade humana tem como característica não só a utilização de instrumentos, mas também se realiza de forma coletiva.

Leóntiev acredita que as particularidades da percepção não estão reduzidas a alguns fatos raros e a processos da mente. Afirma que a consciência tem característica psicológica própria que são: a originalidade da estrutura interna, condicionada pelas peculiaridades da estrutura da atividade externa, prática, do sujeito (TALÍZINA, 1988).

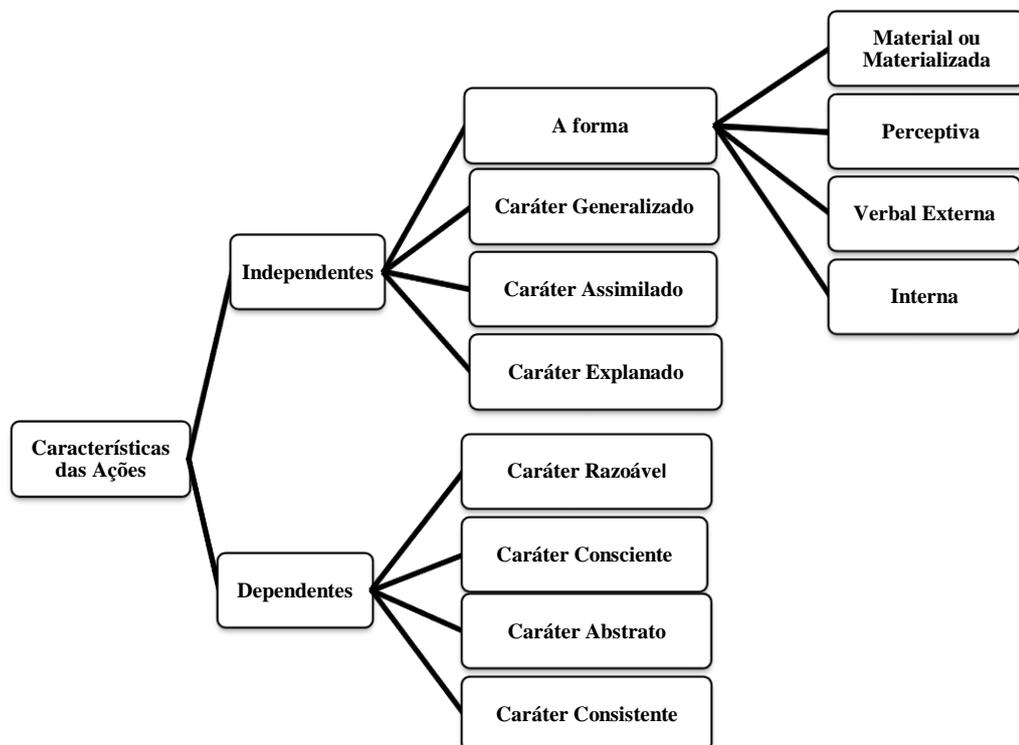
A teoria de formação por etapa das ações mentais, mostra o estudo como um conjunto de elementos de diversos tipos de atividade cuja realização leva o estudante a obter novos conhecimentos e hábitos. Galperin considera o estudo como toda atividade, que em sua execução apresenta resultado de novos conhecimentos e habilidades, assim como os conhecimentos e habilidades antigas passam a ter novas propriedades.

1.1.2 Características das Ações

A ação apresenta características independentes (primárias) que se reportam: à forma, ao caráter generalizado, ao caráter explanado e ao caráter assimilado. E as dependentes (Secundárias) em caráter razoável, consciente, abstrato e consistente. As características das ações encontram-se destacadas no (Esquema 2).

A forma da ação é caracterizada pela classe de apropriação do sujeito enquanto realiza a ação, sendo, a interiorização da ação executada pelo homem. Para a ocorrência deste percurso é necessário desempenhar quatro formas de ação: a material, perceptiva, a verbal externa e mental.

Esquema 2 - Características das Ações



Fonte: Adaptação de Talízina, 1988.

Nas características das ações independentes, destaca-se: a forma com quatro desdobramentos, pelos quais a ação passa da sua forma externa para interna (TALÍZINA, 1988):

- *material* ou *materializada* são as ações iniciais que serão colocadas em prática, sua particularidade é mostrada ao sujeito através de objetos reais (forma material) ou em formato de modelos, esquemas, desenhos (forma materializada);
- *perceptiva* aborda os sentidos onde pode-se ver e ouvir, seu surgimento dar-se no resultado da ação material ou materializada;
- *verbal externa* tem como característica a produção, ou seja, o objeto é apresentado pelo sujeito na linguagem oral ou escrita;

- *mental* o sujeito realiza a ação “para si”, esta ocorre pela organização de representações, conceitos, operações, que se constitui “para si”. A execução da ação na forma mental apresenta que a ação passou pelo processo de externa a interna.

O caráter generalizado da ação se caracteriza por separar as propriedades do objeto, em essenciais e não essenciais para o cumprimento da ação.

O caráter explanado da ação tem por objetivo detalhar as operações que a compõe, ou seja, evidenciar se todas as operações que compõem a ação foram realizadas pelo sujeito. À medida em que as ações vão sendo formadas, as operações se reduzem, e a ação se torna reduzida.

O caráter assimilado inclui as características da ação que evidenciam a facilidade para cumprir os procedimentos, o grau de automatização e a agilidade do cumprimento. Inicialmente as ações são realizadas de maneira lenta, aos poucos a ação vai se automatizando, passa a ser executada mais rapidamente, consciente.

A ação é iniciada de forma explanada e vai se automatizando, as quatro características da ação são transformadas durante a atividade. Essas características são conhecidas na sua essência como primárias ou independentes (TALÍZINA, 1988). As características descritas independem uma das outras, uma vez que não tem dependência da ação cognitiva dos sujeitos para serem estudadas (SANTOS, 2014).

As características secundárias estão ligadas diretamente às primárias na realização da ação pelo homem, assim, cada uma contribui com a outra na execução da atividade.

As características dependentes ou secundárias são:

- Caráter razoável da ação, está determinado pelo caráter essencial das condições pelas quais o homem se orienta para realizar a ação;
- Caráter consciente da ação, consiste na possibilidade de realizar a ação e fundamentá-la na forma verbal corretamente, neste ensejo o sujeito pode compreender o que está produzindo e por que está produzindo;
- Caráter abstrato da ação apresenta a possibilidade de cumprir a ação de maneira ampla, é o progresso de todos os elementos do arcabouço da ação até sua forma mental;
- Consistência da ação, compreende-se como a possibilidade de realizar uma ação aprendida tempos depois de sua formação, ou seja, é o resultado da generalização e da automatização do conceito (TALÍZINA, 1988).

O tipo de atividade de estudo evidencia um sistema de ações que ligada a um motivo concomitante garante a relevância do objeto e da atividade que compõe. “Na teoria dada à imagem da ação e a do meio onde se realiza a ação se unem em um elemento estrutural único sobre cuja base transcorre a direção da ação que é chamada de *base orientadora da ação*” (TALÍZINA, 1988, p. 58).

1.1.3 A Base Orientadora da Ação

A Base Orientadora da Ação (BOA) é caracterizada por seu grau de generalidade de forma concreta quando se exprime nos casos particulares e os de forma geral baseado nas invariantes, que são as ações usadas para resolver inúmeros problemas. O nível de plenitude é constituído pela maneira que se realiza a orientação sendo completa ou incompleta, seguindo o modo de obtenção do conhecimento pelos estudantes que está definido em preparada, quando o estudante recebe todas as ações de forma completa e elaborada independentemente quando o mesmo terá que encontrar as ações que podem ser realizadas com a ajuda do professor (MENDOZA, 2010).

Dentro da BOA encontra-se inserido o conjunto de regras, que serve de base para o sujeito realizar uma atividade. Desse modo, “o estudante pode construir sistemas de conhecimentos e estabelecer os modelos das ações a executar, visando a realização da atividade assim como a ordem de realização dos componentes da ação: orientação, execução e controle [...]” (NÚÑEZ; OLIVEIRA, 2013, p. 299).

Por meio da BOA são formuladas as ações necessárias que, executadas pelo sujeito, levam ao resultado final da ação, esta se encontra ligada ao processo e ao conjunto de regras exigidas para realização da ação.

Galperin citado por Núñez (2013), dá ênfase que é importante a orientação construída pelo sujeito na atividade prescrita, pois nesta está a qualidade da aprendizagem. A esta etapa primeiramente Galperin chamou de “etapa de formação da representação prévia da tarefa” e, no decorrer da continuação de suas pesquisas, a destacou como “base orientadora da ação”.

A BOA é o modelo pelo qual o sujeito se embasa para realizar a ação, na qual se encontra inserido tanto a estrutura como as partes de funcionamento: orientação, execução e controle. Nesse sentido a atividade prática envolve a parte externa bem como a interna, intelectual no processo de ensino da atividade.

Entre os tipos de BOA que mais se destacam estão a concreta, completa, preparada; generalizada, completa, independente; generalizada, completa e preparada. As características gerais da Base Orientadora da Ação encontram-se destacadas na (Quadro 1) quanto ao seu grau de generalização, sua plenitude e o modo de obtenção:

Quadro 1 - Característica da Base Orientadora

Nº.	<i>Caráter Generalizado</i>	<i>Plenitude</i>	<i>Modo de obtenção</i>
I.	Concreta	Incompleta	Elaborada independentemente
II.	Concreta	Completa	Preparada
III.	Generalizada	Completa	Elaborada independentemente
IV.	Generalizada	Completa	Preparada
V.	Generalizada	Incompleta	Preparada
VI.	Generalizada	Incompleta	Elaborada independentemente
VII.	Concreta	Completa	Elaborada independentemente
VIII.	Concreta	Incompleta	Preparada

Fonte: Talízina, 1988, p.89.

Talízina (1988), apresenta oito tipos de Base orientadora da ação, dentre as quais a BOA I, BOA II e BOA III, tiveram o privilégio de ser as primeiras a serem usadas experimentalmente, tempos depois foi utilizada a BOA IV. Desse modo descreve-se os três tipos de BOA de maior destaque.

A BOA I, se apresenta de maneira incompleta quanto a orientação do sujeito, devido realizar um percurso por meio de indicadores isolados, demonstra pequeno potencial na sua execução. As orientações para se chegar ao resultado final do processo de ensino encontram-se representadas na forma particular. O que faz com que o processo de assimilação da tarefa ocorra de maneira lenta, além de apresentar um número elevado de erros no resultado, a transferência dos conhecimentos a outras situações torna-se limitada a utilização desta BOA.

A BOA II se caracteriza por ser apresentada ao sujeito de forma elaborada, todas as condições necessárias para a execução correta da ação são evidenciadas. As condições são mostradas ao sujeito primeiramente em forma preparada e, por conseguinte, em forma particular, este só serve para orientação em caso determinado. Assim, a cada nova tarefa será necessária uma nova orientação. Esta BOA garante que a formação da ação avance rapidamente e sem erros. No sentido de transferência a novas situações esta é limitada, por se destacar de forma preparada e particular, que dificulta sua aplicação a novos conhecimentos.

A BOA III está organizada de maneira completa e generalizada, na qual pode ser aplicada a um conjunto de fenômenos e tarefas de uma mesma classe. Apresenta, em sua composição, a essência invariante da atividade por se referir a uma orientação teórica. A sua construção pelo sujeito pode ser elaborada de forma independente, por meio de métodos gerais que lhe são transmitidos pelo professor. Através desta BOA a atividade é formada com rapidez e com poucos erros e, por sua grande estabilidade, elevado nível de generalização, permite de maneira satisfatória a transferência a novas situações, garantindo assim potencialidade para o desenvolvimento de habilidades.

Núñez descreve as considerações de Galperin a respeito do terceiro tipo de orientação:

Referindo-se ao terceiro tipo de orientação, Galperin (1986, p. 232) afirma que, como resultado do ensino, no panorama das coisas, ocorrem três mudanças fundamentais: em lugar de simplesmente as coisas, um conjunto de parâmetros relativamente independentes intervêm; em lugar de simplesmente a propriedade, o conjunto de suas unidades fundamentais; em lugar do conjunto desordenado de partículas, a organização das unidades fundamentais, de acordo com o esquema comum a todos os objetos da esfera que se estuda (2013, p. 301).

A Base Orientadora da Ação pode ser entendida com uma ferramenta que serve de intermédio de natureza semiótica, a qual é elaborada pelo professor com o estudante, “um tipo de ferramenta psicológica, segundo as ideias de Vygostky [...]” (Núñez, 2013). Portanto, para preparar a BOA o professor precisa ter em conta os objetivos de ensino de acordo com o nível dos estudantes e os conhecimentos prévios dos mesmos em termos de conceitos e habilidades.

A BOA V, VI e VIII se apresentam de forma incompleta, não garantem o cumprimento correto da ação pelo sujeito, ou seja, pode conduzir a resolver uns problemas dados corretamente e na solução de outros problemas a se obter resultado incorreto. A BOA VII, coincide com a do BOA II quanto ao grau de generalização e plenitude, porém, estas se diferenciam no modo de obtenção. Esta base orientadora da ação conduz ao resultado correto, pois apresenta todo o sistema de condições que asseguram a execução da ação sem erros. No entanto, sua aplicação só serve para situações específicas, não se aplicando a outros casos, o que a torna limitada.

1.1.4 Processo de Assimilação

O trabalho de Galperin está centrado no princípio de que as ações externas contribuem com a representação das ações mentais. Com base neste princípio, Galperin criou a teoria de

desenvolvimento psíquico, que foi convertida em uma teoria de ensino apresentando como ideia principal à formação planejada por etapa das ações mentais. Nesse sentido, deve-se levar em consideração que o processo de formação de uma ação inicia com objetos reais ou suas representações, passando para as etapas posteriores até chegar à linguagem interna (RIBEIRO, 2008).

Galperin produziu um dos estudos mais minuciosos das etapas de formação da atividade interna a partir da externa. Para chegar à fase de internalização deve-se passar pela atividade-orientação, execução e controle, das transformações que sofre a ação nesse processo de abreviação-generalização, automatização, mediante o qual ela adquire um caráter especificamente mental (NUÑEZ; PACHECO, 1998).

Pereira apresenta a trajetória de Galperin até a criação de sua teoria:

Integrante da escola de Jarkov, contemporâneo de Leontiev e continuador das ideias deste e de Vygotsky, P. Ya. Galperin criou uma teoria do desenvolvimento psíquico a partir do estudo da gênese dos processos cognitivos, na qual destaca o papel das ações externas no surgimento e formação das ações mentais no processo de ensino. Esse método conhecido como *Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais e dos Conceitos* vem revelar as etapas do processo de internalização de uma atividade externa em interna (2013, p. 93).

A assimilação ocorre quando o sujeito se apropria do objeto de estudo, podendo ser este um conteúdo de uma disciplina. Conforme realiza as etapas o objeto vai se tornando algo mais particular do sujeito que adquire conhecimento. De acordo com Ribeiro, “Para Talízina (2009), assimilação é a passagem da experiência social para a experiência individual e essa passagem pressupõe a atividade do sujeito que assimila a experiência social” (2013, p. 93).

Compreende-se de Núñez, citado por Araujo, Zaidan e Vieira, que o estudo é um sistema que envolve certos tipos de atividades que proporcionam ao estudante adquirir novos conhecimentos, habilidades, hábitos, atitudes e valores. A teoria evidenciada contribui de forma metodológica e científica para a atividade de ensino, ao descrever que a assimilação do conhecimento ocorre por meio de etapas, iniciando-se com a experiência social até a experiência individual. “Esta teoria considera a aprendizagem como um tipo específico de atividade cujo cumprimento conduz o aluno a novos conhecimentos, hábitos e ao desenvolvimento de sua personalidade” (2013, p. 116).

Galperin criou as cinco etapas das ações mentais do processo de assimilação, a motivação se faz presente em todas as etapas, pois a motivação é criada de forma positiva por meio de situações problemas, que levem o estudante a aprender através de problemas reais (TALÍZINA, 1988). As etapas do processo de assimilação são:

Primeira Etapa: A elaboração do esquema da base orientadora da ação;

Segunda Etapa: Formação da ação na forma material ou materializada;

Terceira Etapa: Formação da ação como verbal externa;

Quarta Etapa: Formação da ação na linguagem externa para si;

Quinta Etapa: Formação da ação em linguagem interna.

Essas cinco etapas são apresentadas por Galperin, como fundamentais para que os conceitos sejam assimilados pelo sujeito, e estas constituem a formação da atividade interna, mental. As etapas das ações mentais encontram-se detalhadas na (Quadro 2):

Quadro 2 - Características das Ações

Etapas das Ações Mentais	Material ↓ Não-generalizada ↓ Consciente ↓ Explanada ↓ Compartilhada ↓
Etapa 1. A Base Orientadora da Ação	A primeira etapa enfatiza que os estudantes devem receber as explicações necessárias sobre o objetivo da ação, seu objeto, o sistema de pontos de referência. Nesta etapa se encontram o nível de partida da ação e as condições para que a ação seja cumprida. Nesse momento se elabora o planejamento a ser desenvolvido, pois a BOA apresenta grande importância na formação da ação. São explicitados aos estudantes como e em que ordem se realizam os três tipos de operações que fazem parte da ação: orientação, execução e controle.
Etapa 2. Forma Material ou Materializada	Os estudantes já realizam a ação, mas agora na forma material externa com o desenvolvimento de todas as operações que formam parte desta etapa. Nesta forma são realizadas a composição da orientação, execução e controle da ação. Permite aos estudantes assimilar o conteúdo da ação e ao professor realizar um controle objetivo do cumprimento de cada uma das operações que formam parte da ação.
Etapa 3. Ação Verbal Externa	Todos os elementos da ação estão expostos na forma verbal externa, a ação passa pela generalização, mas de forma não automatizada e nem reduzida. A linguagem torna-se a portadora independente de todo o decurso, tanto da tarefa como da ação. A ação verbal deve ser obrigatoriamente assimilada na forma desdobrada: todas as operações que a integram não só devem adquirir a forma verbal, ao contrário, devem ser assimiladas pela ação. A generalização da ação nesta etapa obtêm novas possibilidades que lhe abrem a forma verbal da ação.
Etapa 4. Linguagem Externa para si	A quarta etapa se diferencia da anterior, devido à ação ser realizada em silêncio, sem escrevê-la, como interpretação para si mesmo (internamente). No entanto, ao adquirir a forma mental, a ação começa a reduzir-se e automatizar-se rapidamente, adquirindo a forma da ação segundo a regra.
Etapa 5. Linguagem Interna	A ação adquire rapidamente um desenvolvimento automático, neste momento, a auto-observação se faz inacessível. Refere-se agora ao ato do pensamento, em que o processo se encontra oculto, e se abre a consciência só o produto deste seguimento, na ação mental formada.
	↓ ↓ ↓ ↓ Mental Generalizada Abreviada Independente ↓ Automatizada

Fonte: Talízina, 1988.

Desse modo, a ação mental tão diferente da externa, material, é produto da transformação, por etapas, da última, a linguagem interna. A formação por etapas das ações ideais, em particular mentais, relaciona a atividade psíquica com a atividade externa, do objeto,

material, representando assim, não só a chave de compreensão dos fenômenos psíquicos, mas também a sua dominação na prática (GALPERIN, 1959, p. 466, apud, TALÍZINA, 1988).

Na formação por etapas das ações mentais, a atividade externa se transforma em atividade interna, começando com a motivação, em seguida o professor orienta o aluno nas ações que deverá executar para seu aprendizado, logo após, este realiza a atividade passando assim para forma materializada, e deste modo o aprendiz verbaliza o que aprendeu e vai analisar tudo o que compreendeu, chegando à linguagem interna que evidencia o aprendizado do estudante no assunto estudado. (MENDOZA, 2010).

1.1.5 Direção da Atividade de Estudo

Na Teoria Geral da direção Talízina (1988) descreve dois tipos de direção: isolada e cíclica. A isolada não apresenta o encaixe de retorno, além disso não regula o andamento do processo do sistema de direção. A cíclica se destaca por possuir o enlace de retorno e regulação do desenvolvimento da direção, é mais eficaz. A direção cíclica engloba dois tipos de características: a “caixa preta” em que o enlace de retorno e a regulação do processo são realizados apresentando apenas a saída, o resultado final do processo, ou seja, não apresenta o passo a passo desenvolvido até se chegar ao resultado; e a “caixa branca” (transparente) que torna possível no enlace de retorno as informações necessárias do processo que levam ao resultado final.

No ensino e na educação, Talízina (2000) evidencia que o processo de ensino por meio da direção cíclica (transparente) merece destaque e utilização, esta direção pode ser realizada através dos seguintes procedimentos: definir o objetivo de ensino da atividade de estudo, determinar o nível de partida na atividade cognoscitiva, formar a base orientadora da ação, selecionar as tarefas do processo de assimilação e os instrumentos de controle, executar a retroalimentação e correção.

No ensino para que o processo na direção cíclica (transparente) seja realizado com sucesso, faz-se necessário obter dados que permitam resolver as seguintes tarefas:

- Indicação precisa do objeto (Processo) da direção;
- Indicação do sistema de características (variáveis) independentes do objeto da direção;
- Indicação dos principais estados transitórios (etapas fundamentais) do processo dirigido.

Na direção do processo de ensino-aprendizagem, o professor tem função de ser uma fonte de informação e dirigir o processo de assimilação, na busca de que os estudantes compreendam cada etapa do processo. A direção deve levar em consideração todas as informações repassadas no processo e o retorno. Todos os elementos são importantes na transformação para se chegar ao resultado final.

Os elementos da direção do processo de ensino compreendem o seguinte: o professor apresenta o objetivo de ensino de determinado conteúdo, após inicia o assunto para os alunos explicando-o de modo que estes compreendam. Através de tarefas os estudantes irão assimilar o assunto. Durante a aprendizagem o professor pode coletar informações que lhe serão úteis para corrigir os erros percebidos por meio do diagnóstico, assim, a direção do processo de estudo torna-se mais eficaz (MENDOZA, 2009).

1.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMA COMO METODOLOGIA DE ENSINO NO CONTEÚDO DE DERIVADAS PARCIAIS

As primeiras ideias da constituição da resolução de problemas surgiram nos tempos antigos, somente após alguns períodos os problemas de matemática passaram a ocupar um lugar central no currículo da matemática escolar. Existem registros de problemas matemáticos na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda, encontrados problemas matemáticos em livros-texto de matemática dos séculos XIX e XX. Mas, seus exemplos apresentavam uma visão limitada quanto à aprendizagem de resolução de problemas (ONUCHIC, 1999).

A sociedade passou de rural, onde poucos necessitavam conhecer matemática, para uma sociedade industrializada, em que aumentou o número de pessoas que precisavam aprender matemática, devido à falta de técnicos especializados; depois para uma sociedade de informação em que exigia da maioria das pessoas saber matemática e caminhando agora para a sociedade do conhecimento, se tornado natural que se tenha interesse em realizar mudanças no modo de como ensinar e como se aprender matemática.

O que se percebe do ponto em questão é que hoje já fazemos parte desta sociedade do conhecimento, que está vivendo a real necessidade de mudança no ensino da matemática. Mas para que as mudanças ocorram de forma eficaz, há a necessidade de capacitar os profissionais desta área para um bom desempenho do seu trabalho.

Faz pouco tempo que a resolução de problema passou a ter prestígio, somente nas últimas décadas os educadores da área começaram a aceitar a ideia de que o progresso da capacidade de resolver problemas necessitava de um olhar mais reflexivo. Segundo Onuchic:

[...] Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade [...] (1999, p. 203).

Hoje, o objetivo não é apenas que o estudante saiba resolver problemas apresentados em sala de aula, mas prepará-los para resolver diversos problemas com os quais poderá se deparar no cotidiano. Porém o que se percebe é que o professor apresenta o conteúdo e os estudantes fazem exercícios, enquanto que o correto seria ensinar por meio de resolução de problema.

Sabe-se que é desafiador conduzir os alunos a resolver problemas que estão ligados a situações reais da vida. De acordo com Pozo (1998), compreende-se que uma situação pode ser idealizada como um problema na medida em que este é reconhecido como um problema, de maneira que não necessite de procedimentos automáticos para solucioná-lo de forma rápida, sem exigir o seguimento de reflexão ou uma tomada de decisão sobre as séries dos passos a serem seguidos. Para Lucchesi (1990), o problema é uma situação em que ocorre uma irregularidade, nesse sentido, é aquilo que necessita de uma solução não de forma imediata, a qual exige a intelectualidade para sua resolução (MENDOZA; TINTORER, 2010).

Do conhecimento de Pozo (1998) entende-se também que, a eficiência na solução do problema não está firmada em estratégias e habilidades gerais transferíveis, que podem ter validade em qualquer caso, mas sim dos conhecimentos particulares úteis para solucionar determinado problema. Portanto, a eficiência na solução do problema não está ligada a uma cognição abrangente, mas sim a conhecimentos específicos (MENDOZA; TINTORER, 2010).

Mas isto não significa que as estratégias gerais não podem influenciar de maneira importante a eficiência como se observa nos princípios de Polya (1975) na resolução de problema, que aplica os princípios de compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução de um plano e que este demonstrou uma melhora na resolução de problemas matemáticos, justificando assim sua extraordinária popularidade com o decorrer dos anos (MENDOZA; TINTORER, 2010).

Onuchic expõe três modos diferentes de abordar resolução de Problemas que foram evidenciados por Schroeder e Lester (1989): ensinar sobre resolução de problema, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problema. O professor que faz uso do primeiro modo para ensinar busca destacar o modelo de resolução de problema de Polya ou alguma variação deste. No segundo, o professor dá ênfase na forma que a matemática é ensinada como também o que pode ser aplicado a partir dela na resolução de problemas, que

podem ser rotineiros e não rotineiros. Como terceiro modo, ensinar através da resolução de problema tem sua importância não apenas por se aprender matemática, mas devido ao fato de iniciar o aspecto-chave de um determinado assunto com um problema, por isso a situação problema é apresentada como um passo inicial para fazer isso, ensinar conteúdos matemáticos (1999).

Na resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o estudante aprende matemática resolvendo problemas além de aprender matemática para resolver problemas. O ensino nesta abordagem deixa de ser um processo separado. Nessa metodologia, o ensino torna-se resultado de um método mais vasto. Mas, sabe-se que existem vários obstáculos que têm impedido o desenvolvimento da educação matemática no Brasil, principalmente falta de qualificação, condições de trabalho não adequadas, inexistência de políticas públicas e educacionais realizadas, além de interpretações erradas de concepções pedagógicas.

Afirma-se, de acordo com Dante (2008) e Tintorer (2013), que a resolução de problema como metodologia de ensino, auxilia o aluno na apreensão de significados, a Resolução de Problema pode levar o estudante a pensar, desenvolver seu raciocínio lógico, a saber enfrentar situações novas, ajuda a preparar o cidadão para a vida. Mas, primeiramente o professor deve se capacitar para ensinar os alunos a resolver problemas, aprimorar suas habilidades no saber interpretar, analisar e argumentar. Assim, estará contribuindo para que os aprendizes venham efetivar os quatro pilares da educação: aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser.

1.2.1 O Conceito de Derivadas Parciais e suas Aplicações

Inicialmente será apresentado um resumo do conteúdo de derivadas parciais, conhecida na leitura de vários livros de cálculos. Após, destaca-se a ASP, na sequência, descreve-se a ASP desenvolvida para o conteúdo de derivadas parciais, em seguida apresenta-se como foi elaborada a direção da ASP e as etapas das ações mentais em derivadas parciais, dá-se prosseguimento com o passo a passo da ASP em derivadas parciais e suas aplicações evidenciando exemplos contextualizados dos assuntos estudados, finalizando com ASP da didática em matemática.

De acordo com o conteúdo de derivadas parciais objeto desta pesquisa, se faz necessário mostrar primeiramente neste tópico a notação de derivadas.

Conforme Leithold (1994), a utilização do símbolo f' para a derivada da função f foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século dezoito.

Essa notação indica que a função f' é derivada da função f e seu valor em x é $f'(x)$. Se (x, y) for um ponto do gráfico de f , então $y = f(x)$ e y' também será usado como notação para a derivada de $f(x)$.

Prosseguindo no contexto de derivadas, destaca-se que o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu o símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada. No século dezessete Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), em seus estudos de forma independente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. Acredita ser possível que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos (LEITHOLD, 1994).

A derivação de uma função de n variáveis com valores reais reduz-se ao caso unidimensional, se tratarmos uma função de n variáveis como uma função de uma variável de cada vez, mantendo fixas as demais variáveis. Assim, temos o conceito de *derivada parcial*. Será apresentado a definição de derivada parcial de uma função de duas variáveis (LEITHOLD, 1994, p. 932).

Definição: Seja f uma função de duas variáveis, x e y . A derivada de f em relação a x é aquela função, denotada por $f_x(x, y)$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Se o limite existir.

Da mesma forma, a derivada parcial de f em relação a y é aquela função, denotada por $f_y(x, y)$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por:

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Se o limite existir.

Ex. 1: Aplique a definição a cima para achar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ se $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$

Solução:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3 \Delta x - 2y) \\
&= 6x - 2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x \Delta y + y^2 + 2y \Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-2x \Delta y + 2y \Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\
&= -2x + 2y
\end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) for um ponto no domínio de f , então

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Se esse limite existir, e

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

Se esse limite existir.

Ex. 2: Aplicando a fórmula (1) para encontrar $f_x(3, -2)$ para a função f do exemplo anterior.

$$\begin{aligned}
f_x(3, -2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{27 + 18 \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4 \Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (18 + 3 \Delta x + 4) \\
&= 22
\end{aligned}$$

Interpretações geométricas das derivadas parciais de uma função de duas variáveis são similares àquelas dadas para funções de uma variável. O gráfico de uma função f de duas variáveis é uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$. Se y for mantida constante (digamos, $y = y_0$), então $z = f(x, y_0)$ será uma equação do traço dessa superfície no plano $y = y_0$. A curva pode ser representada pelas equações

$$y = y_0 \text{ e } z = f(x, y) \quad (3)$$

pois ela é a intersecção dessas duas superfícies.

Então, $f_x(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente á curva dada pelas equações (3) no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, no plano $y = y_0$. Analogamente, $f_y(x_0, y_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva cujas equações são $x = x_0$ e $z = f(x, y)$ no ponto P_0 , no plano $x = x_0$

Ex. 3: Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{24 - x^2 - 2y^2} \text{ com o plano } y = 2, \text{ no ponto } (2, 2; \sqrt{3}).$$

Solução A inclinação pedida é o valor de $f_x(x_0, y_0)$ no ponto $(2, 2; \sqrt{3})$.

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}} \quad (1)$$

Assim, em $(2, 2; \sqrt{3})$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{-2}{2\sqrt{12}} \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (3)$$

Prosseguindo com o assunto destaca-se que: como toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada. Se f for uma função de duas variáveis x e y , a derivada parcial de f em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em x (apenas x varia, enquanto y é mantido fixo em y_0). Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em P_0 dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em y , com x fixado.

Ex. 1: De acordo com a lei dos gases ideais para um gás confinado, P newtons por metros quadrados for a pressão, V metros cúbicos for o volume e T graus for a temperatura, teremos a fórmula $PV = kT$ (6), onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de um gás em certo recipiente seja 100 m^3 e que a temperatura seja 90° e $k = 8$.

- Ache a taxa de variação de P por unidade de variação de T se V permanece fixo em 100 m^3 .
- Use o resultado da parte (a) para aproximar a taxa de variação na pressão, se a temperatura for aumentada para 92° .
- Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em P se T permanecer fixa em 90° .
- Suponha que a temperatura seja mantida constante. Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no volume, necessária para produzir a mesma variação na pressão que foi obtida na parte (b).

Solução:

Substituindo $V = 100$, $T = 90$ e $k = 8$ na equação (6), obtemos $P = 7,2$.

- Resolvendo (6) para P com $k = 8$, obtemos $P = \frac{8T}{V}$

A taxa de variação instantânea de P por variação unitária em T , se V permanece fixo, é

$$\frac{\partial P}{\partial T}, \text{ e } \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$$

Quando $T = 90$ e $V = 100$, $\frac{\partial P}{\partial T} = 0,08$, que é a resposta pedida.

(b) Do resultado da parte (a), quando T for acrescido de 2° (e permanecer fixo), o aumento aproximado em P será $2(0,08) = 0,16$. Concluimos, então, que se a temperatura for aumentada de 90° para 92° , o aumento na pressão será de aproximadamente $0,16 \text{ N/m}^2$.

(c) Resolvendo (6) para V quando $k = 8$, obtemos $V = \frac{8T}{P}$

A taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P , se T permanecer fixa, é $\frac{\partial V}{\partial P}$, e $\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}$

Quando $T = 90$ e $P = 7,2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial P} &= -\frac{8(90)}{(7,2)^2} \\ &= -\frac{125}{9}\end{aligned}$$

Que é a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P quando $T = 90$ e $P = 7,2$, se T permanecer fixa em 90° .

(d) Se P for acrescido de $0,16$ e T for mantida fixa, então, do resultado da parte (c), a variação em V deve ser de $(0,16)\left(-\frac{125}{9}\right) = -\frac{20}{9}$. Logo, devemos diminuir o volume em $\frac{20}{9} \text{ m}^3$, se a pressão for aumentada de $7,2$ para $7,36 \text{ N/m}^2$.

1.2.2 Atividade de Situações Problema em Matemática

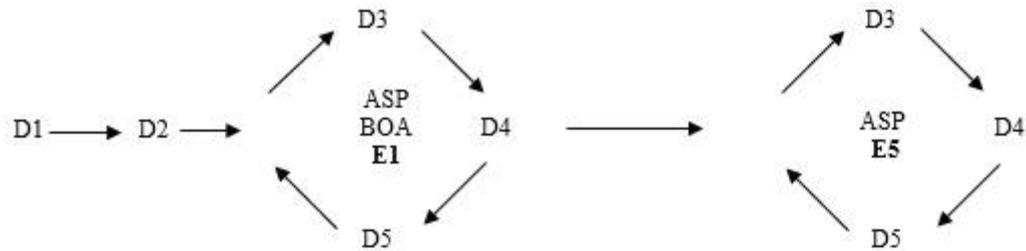
A ASP em Matemática tem como objeto de estudo os problemas matemáticos, visando dispor aos estudantes estratégias eficazes que contribuem com a qualidade do desempenho na resolução de problemas. Desse modo, “esta atividade externa deve passar por cinco etapas qualitativas de formação por etapas das ações mentais até chegar a ser interna, [...], norteado pela direção do processo de estudo” (MENDOZA; ORTIZ; MORENO, 2009 apud MENDOZA; TINTORER, 2011, p. 3).

O ensino previsto para a resolução de problemas matemáticos, além de fundamentar-se em uma teoria psicológica de ensino, nos princípios metodológicos da direção do processo de estudo, deve apoiar-se em uma didática específica que preserva as particularidades dos conhecimentos amparados por recursos técnicos (MENDOZA; TINTORER, 2010).

Em estudos realizados, Mendoza e Tintorer (2010), embasados em Talízina, descreveram que a atividade de ensino-aprendizagem deve ser comandada pelo professor de acordo com os princípios da teoria geral de direção, compostos pelos itens seguintes: o objetivo de ensino (D_1), o estado de partida da atividade psíquica dos estudantes (D_2), o processo de

assimilação (D₃), a retroalimentação (D₄) e a correção (D₅). Deve ser realizado de forma cíclica e transparente (Esquema 3), apresentando como objetivo principal, o processo de transformação da atividade externa em atividade interna.

Esquema 3 - Direção da ASP



Fonte: Mendoza, 2009.

Conforme Mendoza e Tintorer:

A Atividade de Situações Problema (ASP) em Matemática está orientada pelo objetivo de resolver situações problema na zona de desenvolvimento proximal num contexto de ensino aprendizagem onde existe uma interação entre o professor, o estudante e a situação problema, utilizando a resolução de problema em Matemática como metodologia de ensino, a tecnologia disponível e outros recursos didáticos, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação (2013, p. 13).

A ASP em Matemática desenvolvida por Mendoza (2009), encontra-se formada por um sistema invariante de quatro ações com suas respectivas operações (Quadro 3) que permitem solucionar várias classes de problemas matemáticos.

Quadro 3 - A Atividade de Situações Problema

Ações	Operações
Primeira Ação: <i>Compreender o problema</i>	Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema.
Segunda Ação: <i>Construir o modelo matemático</i>	Determinar as variáveis e incógnitas; nominar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições e por último realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.
Terceira Ação: <i>Solucionar o modelo matemático</i>	Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo; selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo e solucionar o modelo matemático.
Quarta ação: <i>Interpretar a solução</i>	Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema; dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema; realizar uma reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

Fonte: Mendoza, 2009.

Portanto, através dos procedimentos da ASP podem ser resolvidos diversos problemas que tenham principalmente modelos matemáticos. De acordo com a complexidade dos conteúdos matemáticos a serem assimilados, os conhecimentos prévios dos estudantes e suas habilidades na resolução de problema, deve-se começar a orientação das ações da ASP por problemas heurísticos e não por situações problema (MENDOZA; TINTORER, no prelo).

1.2.3 A Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais

Segundo Mendoza (2009), a ASP em matemática é uma estratégia para resolver problemas matemáticos que se fundamenta na teoria psicológica de formação por etapas das ações mentais de Galperin, na direção do processo de estudo, princípios de resolução de problemas do matemático Polya podendo ser apoiado por um sistema de computação algébrica.

De acordo com objeto de estudo constituído pelo conteúdo de derivadas parciais, buscou-se sua elaboração na resolução de problemas matemáticos e utilização de uma estratégia de ensino. Assim, a partir da ASP em matemática criada por Mendoza, foi construída uma ASP em Derivadas Parciais, para a execução desta pesquisa.

Atividade de Situações Problema ASP em Derivadas Parciais está composta por ações e operações que são:

A primeira ação, *compreender o problema de derivadas parciais* se faz necessário: realizar a leitura do problema para se extrair todos os elementos desconhecidos na sua forma simbólica, bem como o significado das palavras existentes no problema; destaca-se os dados e suas condições e descreve-se o(s) objetivo(s) do problema no assunto de derivadas parciais e suas aplicações.

A segunda ação *construir o modelo matemático de derivadas parciais*, se faz necessário localizar no problema as variáveis e incógnitas; separar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; compreender e construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições, quando esta não estiver explícita no enunciado do problema e, por último, realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.

A terceira ação *Solucionar o modelo matemático de derivadas parciais*, por meio da definição formal e/ou através das regras de derivação adequadas na solução de cada problema a ser utilizada a partir definição de derivadas parciais para solucionar o modelo matemático.

A quarta ação *“interpretar a solução de derivadas parciais”*, deve-se realizar a interpretação do resultado encontrado; descrever todos os resultados significativos que tenham

relação com o(s) objetivo(s) do problema; apresentar resposta que evidencie o(s) objetivo(s) do problema; realizar uma reflexão baseada no(s) objetivo(s) do problema; fazer uma análise a partir de novos dados e condições que estejam relacionados diretamente ou não com o(s) objetivo(s) do problema para, a partir desses novos dados, se possível, reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

As ações apresentam uma ordem lógica que deve ser respeitada. A execução de todas as ações está subordinada ao problema e nem todas as ações estarão presentes em todos os problemas. Desse modo, o sistema de ações possui uma ordem lógica, mas não necessariamente tem que ser linear (MENDOZA, 2009).

Faz-se necessário a utilização de problemas com dados suficientes para alcançar o objetivo e a execução dos cálculos. A ASP é um procedimento que pode resolver muitos problemas que tenham principalmente modelos matemáticos. Mendoza (2009) afirma que, devido aos vários conteúdos matemáticos a serem assimilados, apresentem-se de forma complexa, sendo necessário conhecimentos prévios dos estudantes e suas habilidades na resolução de problemas. A orientação das ações da ASP deve começar com problemas em que a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado, exigindo assim do estudante tempo para pensar e arquitetar um plano a ser executado, ou seja, uma estratégia que o levará à solução e, só após, desenvolver atividades de situações problema.

1.2.4 O Processo de Assimilação e a Direção da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais

Mendoza e Tintorer, em seus trabalhos por meio da ASP em Matemática, fazem uso da direção da atividade de estudo no processo de ensino-aprendizagem. Desse modo a elaboração da estratégia do ensino de derivadas parciais teve como base a direção de estudo de Talízina e a ASP em Matemática.

O objetivo do ensino foi desenvolvido por meio da ASP em derivadas parciais, constituído por um sistema de ações que são: compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução do modelo. O qual, visava desenvolver habilidades nos estudantes na resolução de problema que apresentou como modelo matemático a derivada de funções com duas variáveis.

O nível de partida da atividade cognitiva dos estudantes foi evidenciado através de uma prova de lápis e papel (diagnóstica) no assunto de derivadas de funções com uma variável e a observação direta na sala de aula, a qual era de suma importância que os estudantes soubessem

a definição de derivada de função com uma variável e suas aplicações, bem como a execução do seu cálculo. Para isso, se aplicou uma prova diagnóstica, de forma que se verificou o nível de conhecimento prévio dos estudantes no assunto em questão, para posteriormente se elaborar a BOA. Na busca de identificar a etapa mental em que se encontravam as ações relacionadas às habilidades dos estudantes na ASP em derivadas, nas perguntas foi incluído o item “justifique sua resposta”.

A partir da avaliação dos conhecimentos prévios elencados das provas de lápis e papel se elaborou a BOA. Em princípio, foi feito o planejamento das aulas levando em consideração as respostas dadas pelos alunos na prova diagnóstica. Na 1ª etapa, que representa a orientação da BOA, as aulas foram dadas pelo professor na forma ilustrativa, na qual o docente direcionou a aprendizagem iniciando com um problema simples de derivadas de função com uma variável, ou seja, uma pequena introdução e posteriormente, ensinou derivadas de funções com duas variáveis. Os estudantes participaram da aula por intermédio do diálogo conduzido pelo professor, que fez perguntas do conteúdo como forma de obter informações, analisando se realmente os alunos estavam compreendendo a explicação, o que conseqüentemente possibilitou a correção dos erros evidenciados nas falas dos alunos. Nessa etapa a participação do professor se deu de maneira bastante expressiva por meio da explicação, enquanto que os estudantes mais prestavam atenção, o papel deste, é mais de observador nesse momento.

Na 2ª etapa, material ou materializada, o professor continuou explicando o assunto na forma ilustrativa, porém, começou a dar mais ênfase às atividades práticas com os estudantes por meio de situações problemas em sala de aula, de modo que pudesse verificar como os estudantes estavam executando as ações previamente orientadas, se estavam sabendo responder aos exemplos propostos, que apresentavam pouco grau de complexidade, de forma explanada e detalhada para que o professor pudesse corrigir as operações que não estavam sendo realizadas corretamente, e assim garantir uma efetiva aprendizagem passando para a próxima etapa, sendo ainda o papel do professor de suma importância nesta fase.

Na 3ª etapa, verbal externa, os alunos, através das aulas práticas, realizaram atividades individuais e em grupo e também apresentaram seminários de maneira a desenvolverem habilidades da construção dos conceitos de derivadas parciais e suas aplicações, o que possibilitou, ao professor, avaliar o grau de compreensão dos alunos na forma escrita e oral. Conforme o envolvimento de uma significativa quantidade de alunos nas atividades, as ações do professor iam diminuindo. Nesta etapa foram feitas correções por parte do professor quanto ao rigor matemático exigido no conteúdo de derivadas de funções com duas variáveis.

Na 4ª etapa, linguagem externa para si, na aula, o professor passou para os estudantes problemas de derivadas parciais de transferência perante novas situações e contextualizados de forma que estes se dedicaram à construção do modelo e interpretem a solução. Neste momento a responsabilidade dos estudantes é mais elevada, pois deveriam executar ativamente as tarefas apresentadas pelo professor, que fez correções esporadicamente a pedido do estudante, as ações começaram a reduzir-se rapidamente e automatizar-se passando para a internalização.

Na 5ª etapa, linguagem interna, o professor apresentou aos estudantes problemas de derivadas parciais com um grau elevado de complexidade, pois os discentes, nesta etapa, passam a obter um conhecimento mais geral, sendo capazes de resolver problemas complexos de forma independente, sem ajuda do professor. Os estudantes passaram a desenvolver todo o processo de maneira automatizada para verificação do cumprimento do objetivo de ensino foi realizada uma avaliação final no conteúdo.

Todo o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes ocorreu na modalidade a distância com encontros de videoconferências e aulas presenciais. Esta modalidade tem reduzido o espaço entre a instituição que promove a Educação a Distância e os alunos através das transformações tecnológicas. Por meio do uso de metodologia adequada, os recursos tecnológicos possibilitaram suprir a educação presencial, com o uso de meios de comunicação audiovisuais e informáticos envolvidos em uma ação de multi-meios. Pois os estudantes são capazes de aprender de forma eficaz, com a aplicação de várias metodologias, desde que utilizadas corretamente (PPP, 2013).

1.2.5 Exemplos da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais

O estudo do cálculo é a matemática das variações e este tem como instrumento de destaque o método de derivação pelo qual se estuda as taxas de variação. Nesse sentido, as taxas de variação encontram-se inseridas em vários contextos como: a aceleração, produtividade da mão de obra e do capital, taxa de crescimento de uma população, taxa de infecção de uma população suscetível durante uma epidemia e muitas outras. Todos estes assuntos podem encontrados em forma de problemas matemáticos, a ser desenvolvido no ensino-aprendizagem das derivadas.

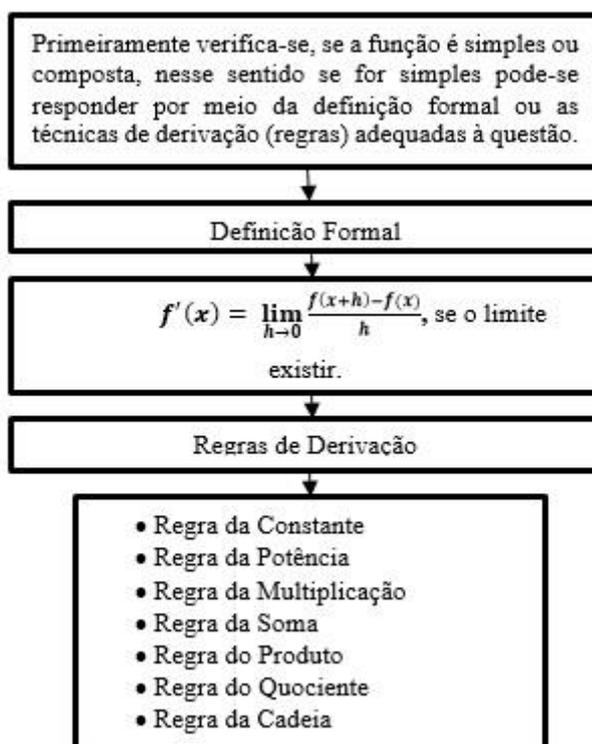
Em muitos problemas que envolvem funções de duas variáveis, estamos interessados em calcular a taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, o que corresponde a derivar a função em relação a uma das variáveis mantendo fixa

a outra variável. Este processo é conhecido como derivação parcial; a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função (HOFFMANN et al., 2011).

Hughes-Hallett et al., (2011), descreve que a derivada pode ser interpretada, geometricamente, como o coeficiente angular da reta tangente à curva e, fisicamente, como uma taxa de variação, e sua aplicação pode ser encontrada em todo o campo das ciências.

De acordo com o estudo em questão, destaca-se neste os conhecimentos básicos do nível de partida necessários para resolver derivada de função de uma variável, que foram elaborados e utilizados na fase de análise da prova diagnóstica e que podem ser utilizados para resolver cálculos de derivadas (Esquema 4).

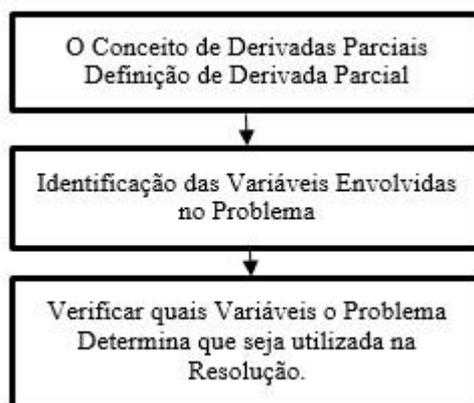
Esquema 4 - Conhecimentos Básicos de Derivação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a compreensão e resolução dos problemas referentes ao conteúdo de derivadas parciais, além das técnicas (regras) apresentadas anteriormente, fez-se necessário o conhecimento das propriedades essenciais (Esquema 5):

Esquema 5 - Conhecimentos Básicos de Derivada Parcial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, resolve-se o problema utilizando a definição formal para derivadas parciais ou as técnicas de derivação (regras) adequadas em relação às variáveis explícitas no problema. Ressalta-se que é necessário conhecer e saber utilizar as técnicas de derivação para resolver problemas de derivadas parciais e suas aplicações, o detalhamento do passo a passo dos conhecimentos básicos de derivação encontram-se no (Apêndice B).

Prosseguindo com a aplicação de derivadas parciais a partir da ASP, será apresentado um resumo da sua contextualização com as diversas ciências.

Na indústria, se um fabricante constata que x unidades de um produto podem ser vendidos no mercado interno por R\$90,00 a unidade e y unidades podem ser vendidas no mercado externo pelo equivalente a R\$110,00 a unidade, a receita total obtida com as vendas do produto é dada por $R = 90x + 110y$.

Na psicologia, o quociente de inteligência de uma pessoa, ou QI , é medido através da expressão $Q = \frac{100m}{a}$, onde a e m são a idade cronológica e a idade mental, respectivamente.

Um carpinteiro que está construindo uma arca com x centímetros de comprimento, y centímetros de largura e z centímetros de altura sabe que a arca terá um volume V e uma área S , onde $V = xyz$ e $S = 2xy + 2xy + 2yz$.

As situações acima são típicas em que uma grandeza de interesse depende dos valores de duas ou mais variáveis. Pode-se apresentar, como outros exemplos, o volume de água no reservatório de uma cidade, que pode depender da quantidade de chuva e do número de habitantes e a produção de uma fábrica, que pode depender do capital disponível, do número de operários e do preço das matérias-primas.

Como no caso das funções de uma variável, uma função de duas variáveis, $f(x, y)$ pode ser imaginada como uma “máquina” que produz uma “saída” $f(x, y)$ para cada “entrada” (x, y) . O domínio de f é o conjunto de todas as entradas possíveis; o conjunto de todas as saídas possíveis é o contradomínio de f . Funções de três variáveis independentes, $f(x, y, z)$, de quatro variáveis independentes, $f(x, y, z, t)$ ou de um número de variáveis podem ser definidas de forma semelhante .

Temos que toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada. Se f for uma função de duas variáveis x e y , a derivada parcial de f em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em x (apenas x varia, enquanto y é mantido fixo em y_0). Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em P_0 dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em y , com x fixado. A definição da derivada parcial em relação a x e em relação a y , encontra-se expressa no início deste tópico.

Os exemplos a seguir descrevem o Modelo da ASP em derivadas parciais e suas aplicações, utilizados nos assuntos estudados na disciplina de Cálculo III na Educação a Distância, outros exemplos estão destacados no (Apêndice A).

Ex. 1: Sabendo que o índice de calor (sensação de calor) I encontra-se em função da temperatura real T e da umidade relativa H . A Temperatura real T é dada em ($^{\circ}\text{F}$) e a Umidade relativa H em (%). Fornecemos a seguinte tabela de valores do Serviço Nacional de Previsão do Tempo norte-americano:

Tabela 1 - Previsão do Tempo norte-americano

H \ T	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Fonte: Stewart, 2007, p. 924.

De acordo com a (Tabela 1), determine a aproximação linear para o índice de calor $I = f(T, H)$ quando T está próximo de $96^\circ F$ e H está próximo de 70% . Use essa estimativa do índice de calor quando a temperatura estiver a $97^\circ F$ e a umidade relativa for 72% .

Solução:

I. Compreender o Problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados desconhecidos do problema.

Estimativa: avaliação ou cálculo aproximado de algo; estima, estimação.

O objetivo do problema é determinar a aproximação linear para o índice de calor $I = f(T, H)$ quando T está próximo de $96^\circ F$ e H está próximo de 70% .

II. Construção do modelo matemático

Determinar as variáveis:

- A variável “ T ” representa o índice de calor (sensação de calor), “ T ” a temperatura real e “ H ” a umidade relativa.

Construção da função de aproximação linear envolvendo duas variáveis

Como (T a temperatura, H umidade relativa) = $(96, 70)$, então $f(96, 70) = 125$.

III. Solução do modelo matemático

Dada a função $f(96, 70) = 125$. Usaremos os seguintes valores tabelados para estimar $f_t(96, 70) \approx 3,75$ e $f_h(96, 70) \approx 0,9$.

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70) \\ &\approx 125 + 3,75(T - 96) + 0,9(H - 70) \end{aligned}$$

Em particular $f(97, 72) \approx 125 + 3,75(1) + 0,9(2) = 130,55$

Desse modo, calculamos a aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de f em (a, b) que é assim denotada:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

IV. Interpretação da solução

Portanto, quando a temperatura $T = 97^\circ F$ e a umidade relativa $H = 72\%$, o índice de calor é $I \approx 131^\circ F$

Ex. 2: Suponha que a temperatura em cada ponto de uma placa de metal seja dada pela função

$$T(x, y) = 1 + x^2 - y^2.$$

Encontre a trajetória percorrida por uma partícula à procura de calor que se encontra no ponto $(-2, 1)$.

Solução:

I. Compreender o problema

O objetivo do problema é encontrar a trajetória percorrida por uma partícula à procura de calor que se encontra no ponto $(-2, 1)$.

II. Construção do modelo matemático.

O modelo já foi dado no problema: $T(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

III. Solução do modelo matemático

A partícula se move na direção do vetor gradiente

$$\nabla T = 2xi - \nabla 2yj.$$

Queremos a curva $C: r(t) = x(t)i + y(t)j$, que começa em $(-2, 1)$ e que tem um vetor tangente em cada ponto com mesma direção sentido que ∇T . Podemos satisfazer a primeira condição definindo

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

Podemos satisfazer a segunda condição definindo

$$x'(t) = 2x(t), \quad y'(t) = -2y(t).$$

Essas equações diferenciais, junto com as condições iniciais em $t = 0$, implicam que

$$x(t) = -2e^{2t}, \quad y(t) = e^{-2t}.$$

Podemos eliminar o parâmetro t observando que

$$x(t)y(t) = (-2e^{2t})(e^{-2t}) = -2.$$

VI. Interpretação da solução

Em termos de x e y , temos

$$xy = -2.$$

A partícula se move a partir do ponto $(-2, 1)$ ao longo do ramo esquerdo da hipérbole no sentido de x decrescente.

As curvas de nível, isotermas da distribuição da temperatura T , também são hipérbolas. Como você pode verificar, a trajetória percorrida pelo objeto é perpendicular a cada uma das isométricas $x^2 - y^2 = c - 1$.

Ex. 4: O único supermercado de uma pequena cidade do interior trabalha com duas marcas de suco de laranja, uma marca local que custa no atacado 30 centavos a garrafa e uma marca

nacional muito conhecida que custa no atacado 40 centavos a garrafa. O dono do supermercado estima que, se cobrar x centavos pela garrafa da marca local e y centavos pela garrafa da marca nacional, venderá $70 - 5x + 4y$ garrafas da marca local e $80 + 6x - 7y$ garrafas da marca nacional por dia. Por quanto o dono do supermercado deve vender as duas marcas de suco de laranja para maximizar o lucro?

Solução:

I. Compreender o problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados e elementos desconhecidos.

Determinar e interpretar os dados do problema.

- O supermercado trabalha com duas marcas de suco de laranja;
- Uma marca de suco de laranja local e uma marca nacional;
- A marca de suco de laranja local custa no atacado 30 centavos a garrafa;
- A marca de suco de laranja nacional custa no atacado 40 centavos a garrafa.

O objetivo do problema é determinar por quanto o dono do supermercado deve vender as duas marcas de suco de laranja para maximizar o lucro.

II. Construção do modelo matemático

Determinar as variáveis

- A variável “ x ” representa os centavos cobrados pela venda da garrafa da marca local e a variável y os centavos cobrados pela venda da garrafa da marca nacional.

Construção da função que envolve duas variáveis:

(lucro total) = (lucro com a venda da marca local) + (lucro com a venda da marca nacional)

Latas vendidas da marca local = $(70 - 5x + 4y)$

Lucro por lata da marca local = $(x - 30)$

Latas vendidas da marca nacional = $(80 + 6x - 7y)$

Lucro por lata da marca nacional = $(y - 40)$

O lucro diário com a venda de suco de laranja é dado pela função

$$f(x, y) = (70 - 5x + 4y) \cdot (x - 30) + (80 + 6x - 7y) \cdot (y - 40)$$

III. Solução do modelo matemático

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (70 - 5x + 4y) \cdot (x - 30) + (80 + 6x - 7y) \cdot (y - 40) \\ &= -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5.300 \end{aligned}$$

Calculamos as derivadas parciais

$$f_x = -10x + 10y - 20 \quad \text{e} \quad f_y = 10x - 14y + 240$$

e igualamos estas derivadas a zero para obter

$$-10x + 10y - 20 = 0 \quad \text{e} \quad 10x - 14y + 240 = 0$$

ou

$$-x + y = 2 \quad \text{e} \quad 5x - 7y = -120$$

Resolvemos este sistema de equações para obter

$$x = 53 \quad \text{e} \quad y = 55$$

Assim, (53, 55) é o único ponto crítico de f .

O passo seguinte consiste em aplicar o teste das derivadas parciais de segunda ordem. Como

$$f_{xx} = -10 \quad f_{yy} = -14 \quad \text{e} \quad f_{xy} = 10$$

Obtemos

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-10)(-14) - (10)^2 = 40$$

Como

$$D(53, 55) = 40 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(53, 55) = -10 < 0$$

IV. Interpretar a solução

A conclusão é que f possui um máximo (relativo) para $x = 53$, $y = 55$. Em outras palavras, o dono do supermercado pode maximizar o lucro vendendo a marca local de suco de laranja por 53 centavos a garrafa e a marca nacional por 55 centavos a garrafa.

1.2.6 A Atividade de Situações Problema da Didática em Matemática

Defende-se neste contexto que o processo de ensino-aprendizagem deve estar centrado na resolução de problemas através da ASP em Matemática, que está formada pelo sistema de quatro ações invariantes (MENDOZA, 2009; MENDOZA et al., 2009a, MENDOZA; TINTORER; CASTAÑEDA, 2009b, MENDOZA; TINTORER, 2010).

A ASP da Didática da Matemática foi estabelecida com base na teoria de formação das ações mentais, direção do processo ensino-aprendizagem e ASP em Matemática, visando por

meio das ações e operações contribuir na formação da teoria científica prática do professor de Matemática para resolver problemas de ensino-aprendizagem no planejamento e exposição de aulas (TINTORER; MENDOZA, 2010).

A partir do problema de ensino-aprendizagem, se formula o problema docente, com isso, a didática ora em questão se destaca como solução para o problema docente. “A estratégia para a solução de problemas didáticos é dividido em três momentos: identificar, planejar e construir a ASP em Matemática que a seguir (Quadro 4) será descrito com suas ações e operações correspondentes” (TINTORER; MENDOZA, 2010, p. 4).

Quadro 4 - Os três momentos da ASP da Didática da Matemática

Momento nº1: Identificar o problema ASP da Didática da Matemática	
1ª-Ação: <i>Compreender a situação problema</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; • Estudar e compreender os elementos desconhecidos; • Determinar os dados e suas condições, tais como as principais propostas do projeto pedagógico no contexto em que se desenvolve o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e as características dos estudantes, professores e recursos didáticos referidas à atividade; • Identificar o(s) objetivo(s) do problema.
2ª-Ação: <i>Identificar a atividade cognoscitiva</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar o(s) objetivo(s) de ensino do conteúdo matemático; • Identificar a existência de um sistema invariante de ações com suas operações para alcançar o objetivo anterior (atividade); • Identificar a existência de métodos para executar a atividade; • Identificar se deseja formar uma nova atividade ou elevar a existente por meio de determinadas características.
3ª-Ação: <i>Determinar o nível de partida da atividade cognitiva dos estudantes</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar o nível dos conhecimentos matemáticos referido ao objetivo de ensino; • Determinar o nível dos estudantes em relação ao sistema de ações da atividade que se deseja formar; • Verificar o nível dos estudantes relacionada à métodos para executar a atividade; • Determinar a etapa mental dos estudantes; • Verificar a atitude e motivação dos estudantes diante da atividade;
Momento nº2: Planejar a ASP em Matemática	
4ª-Ação: <i>Formular o sistema invariante das ações</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Propor a ponte necessária entre o nível de partida dos estudantes e a atividade, que inclui conteúdos e método, que se deseja formar; • Constituir o sistema invariante de ações com suas respectivas operações.
5ª-Ação: <i>Formular a base orientadora da ação (1ª Etapa)</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionar a estratégia do sistema de ações considerando sua generalidade (invariante), plenitude e a forma de obtenção pelos estudantes de acordo com o objetivo de ensino; • Estabelecer a parte orientadora, executora e de controle do sistema de ações.
6ª-Ação: <i>Selecionar os recursos didáticos</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar os recursos didáticos disponível no contexto de aprendizagem; • Analisar os recursos didáticos tomando sua contribuição de todas as etapas da transformação; • Selecionar os recursos didáticos, visando o tipo de base orientadora da ação.
7ª-Ação:	<ul style="list-style-type: none"> • Analisar o tipo de avaliação considerando a etapa mental a formar;

<i>Selecionar o sistema de avaliação</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Analisar os possíveis instrumentos a ser utilizado em cada tipo de avaliação.
Momento nº3: Construir a ASP em Matemática	
8ª-Ação: <i>Preparar o plano de ensino das etapas seguintes</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelecer as ações com suas respectivas operações centradas na resolução de problema; • Elaborar o plano de ensino, segundo o objetivo de ensino guiado pelas etapas de formação das ações mentais com suas características primárias e secundárias.
9ª-Ação: <i>Fazer os planos de aulas</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionar as tarefas seguindo a lógica do processo de aprendizagem; • Elaborar as situações problema que devem guiar os planos de aulas.
10ª-Ação: <i>Preparar os instrumentos do sistema de avaliação</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar os instrumentos para saber quanto e como os estudantes aprendem através das etapas de formação das ações mentais que permitam verificar as características primárias e secundárias do sistema invariante.

Fonte: Mendoza; Tintorer, 2015.

Os três momentos com suas ações, criados por Mendoza e Tintorer (2015) encontram-se detalhados no decorrer deste tópico, iniciando com a primeira ação até a décima ação da atividade se situações problema da didática em matemática. Desse modo, no primeiro momento, na 1ª ação, se faz necessário identificar a situação problema que o professor poderá enfrentar no decorrer da disciplina, conhecer os projetos pedagógicos, pois estes podem conter diretrizes específicas a Matemática para ser atendidas pelo professor, mas também esta primeira ação pode contribuir para o aperfeiçoamento do Projeto, quando algumas diretrizes ou metas não são coerentes com as condições reais do processo de ensino, como podem ser as características dos estudantes, dos professores ou a existência de recursos didáticos. Na 2ª ação, identificar a atividade cognitiva, o domínio pelo professor dos conteúdos matemáticos, de como organizar o sistema de ações e como utilizar os métodos mais adequados são essenciais para tratar de atingir os objetivos de ensino.

A 3ª ação determinar o nível de partida da atividade cognitiva dos estudantes precisa-se saber se os estudantes que irão cursar a disciplina, tem os requisitos intelectuais mínimos necessários para alcançar os objetivos de ensino. Porém, não basta apenas identificar os conhecimentos matemáticos prévios relacionados com os novos conteúdos que serão trabalhados, é preciso também determinar as capacidades para executar as ações e os métodos. Em resumo, as ações explicitadas, representam o momento prévio ao planejamento considerando principalmente os objetivos de ensino, o nível inicial dos estudantes e as condições gerais da escola.

Segundo o momento se planeja a ASP em Matemática, por meio da 4ª quarta ação se formula o sistema invariante das ações é um momento de decisões para o professor logo após analisar os resultados das ações anteriores. Na 5ª ação formular, a base orientadora da ação (BOA) deve ser considerado os objetivos de ensino e o nível de partida dos estudantes. Sendo

necessário selecionar as estratégias concretas para orientar as ações da atividade, que deve ser sempre plena e a mais geral possível ainda que em alguns casos possa ser preparada pelo professor ou com maior participação dos estudantes.

Na 6ª ação, se seleciona os recursos didáticos, escolhe-se um recurso didático como o auxiliar para garantir que o processo de ensino seja eficiente, devem ser selecionados coerentemente com a teoria de aprendizagem adequada e as exigências da teoria geral da direção. Na 7ª ação realiza-se a seleção do sistema de avaliação, sendo importante considerar a etapa de formação das ações mentais em que se encontra o estudante. Inicia-se realizando um diagnóstico relacionado com objetivo de ensino para conhecer o nível de partida dos estudantes, por meio dessas informações se elabora a BOA. O sistema de avaliação deve servir como forma de controle de todo o processo de ensino-aprendizagem para poder realizar os ajustes necessários durante todo o processo e não apenas ao final. Desse modo, neste momento se planeja a atividade, de preferência com ações invariantes, incluindo os recursos didáticos e o sistema de avaliação.

No terceiro momento, se constrói a ASP em Matemática, com a 8ª ação através da elaboração do plano de ensino, centrado na resolução de problema, levando em consideração a lógica e características dos conteúdos matemáticos e as etapas mentais. Como sugestão para sua construção deve ser analisado os seguintes elementos: conteúdos, objetivos, tipo de aulas, horas aulas e etapas mentais. Na 9ª ação fazer os planos de aulas, se faz necessário manter a coerência com os princípios teóricos expostos enquanto a formação das etapas mentais e a direção da ASP em Matemática.

Na 10ª ação preparar os instrumentos do sistema de avaliação assim como na ação anterior, deve ser considerado a etapa de formação das ações mentais e os conteúdos matemáticos. Como instrumentos, as provas de lápis e papel podem ser utilizadas em todas as etapas, com questões subjetivas contendo com frequência a pergunta “Justifique sua resposta”, ou seja, é importante a argumentação das respostas. Também pode ser utilizada provas orais, e que de preferência seja aplicada na etapa verbal externa. A observação direta na sala de aula é um instrumento muito bom na compreensão do processo de aprendizagem dos estudantes, podendo produzir mudanças posteriores nos instrumentos a serem definitivamente utilizados.

CAPÍTULO 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresenta-se de forma detalhada os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, os quais permitiram por meio do seu uso na prática obter a análise dos resultados.

Para tanto, a organização ocorreu em cinco seções, inicialmente apresenta-se a caracterização da pesquisa de modo geral, em que evidencia, de maneira resumida, os enfoques envolvidos na investigação, a utilização da ASP com suas ações e operações construídas para serem aplicadas ao conteúdo de derivadas parciais. Por fim, destacam-se os quatro momentos pelos quais a pesquisa foi desenvolvida.

A segunda seção aborda sobre os modelos de pesquisa utilizados neste estudo: qualitativa, quantitativa e mista, descrevendo como foi elaborado os seus procedimentos na ASP em derivadas parciais, fundamentada nas etapas das ações mentais, visando conhecer como ocorreu a aprendizagem dos estudantes na resolução dos problemas contextualizados.

Na terceira seção, descreve-se a amostra por meio de bases teóricas, prosseguindo com o universo e composição da amostra destacando o grupo de sujeitos envolvidos na pesquisa.

A quarta seção apresenta a elaboração da coleta de dados através dos instrumentos selecionados e utilizados para análise: observação direta, descrição comportamental, visita em campo, prova de lápis e papel e videoconferência. A última seção refere-se à validade da pesquisa.

2.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O problema da pesquisa foi estabelecido na forma mista, por permitir a integração entre o enfoque qualitativo e quantitativo, o que possibilitou relacionar os dados e a análise nestes modelos. A investigação se desenvolveu com a utilização de ações e operações da ASP que são: compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução, no conteúdo de derivadas parciais, de forma a responder à pergunta deste trabalho.

A investigação do ensino-aprendizagem de derivadas parciais, por meio de métodos mistos garantiu a eficácia de poder analisar as mesmas questões da pesquisa nos dois enfoques. E assim obter coletar e analisar dados ainda mais relevantes. Neste contexto, o sistema de ações

da ASP foi convertido em categorias qualitativas e em variáveis no quantitativo, de modo que apresentou resposta aos questionamentos do estudo.

Os objetivos da pesquisa foram evidenciados de forma explicativa, descrevendo as respostas dos fatos e acontecimentos das aulas teóricas, práticas e avaliação, que se deu por meio da coleta nos instrumentos escolhidos, mostrando, se e como, o sistema de ações produz a aprendizagem dos estudantes no conteúdo de derivadas parciais.

Na pesquisa foram realizadas análises do desempenho individual dos alunos, obtidas pelas situações problemas propostas nas atividades e nos testes. Desse modo buscou-se explicar o processo de ensino-aprendizagem das derivadas parciais por meio da ASP fundamentada na teoria das ações mentais. Esta estratégia foi utilizada como um recurso inovador na área de estudo pelo método resolução de problema, visando englobar os conteúdos envolvidos para o ensino-aprendizagem da temática, (os quais fazem parte esta pesquisa). E assim, permitir que os investigadores obtivessem o entendimento integral do fenômeno.

Como uma exigência do método realizaram-se observações diretas das aulas presenciais da disciplina, como também do comportamento e relato dos estudantes nas aulas de tira-dúvidas e videoconferência. A influência exclusiva do estudo de caso encontra-se na sua capacidade de lidar com uma ampla variedade de evidências dos instrumentos utilizados como relatório de observação de campo e da sala virtual do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) que permitiram o acesso às atividades dos alunos.

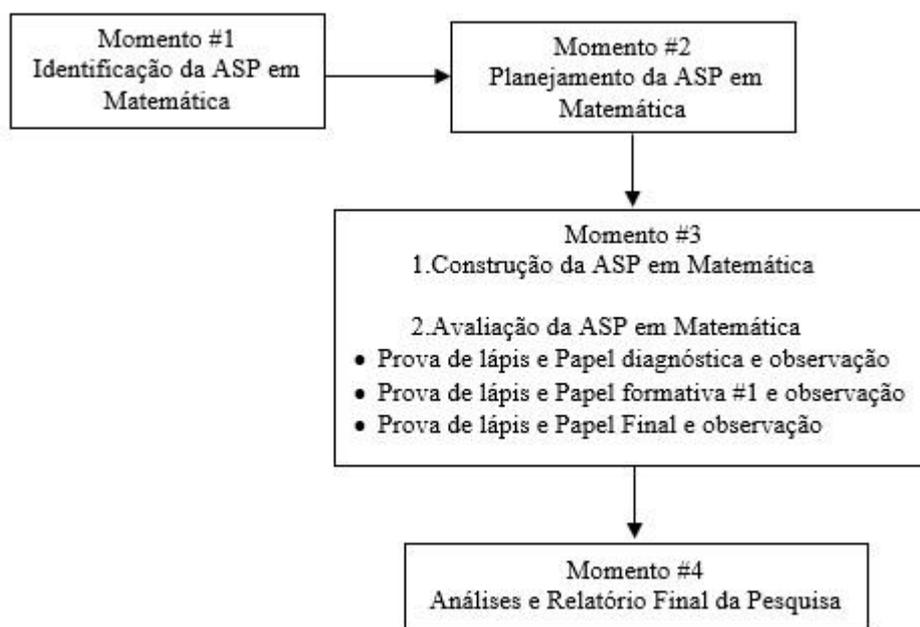
Esta pesquisa buscou fazer uma combinação dos dados qualitativos e quantitativos com o objetivo de inferir resultados explicativos mais consistentes. Conforme descreve Yin (2010), tem crescido a atenção por parte dos pesquisadores às investigações dos métodos mistos, na qual o pesquisador mistura ou combina técnicas, métodos, abordagens, conceitos ou linguagem de pesquisa quantitativa e qualitativa em um único estudo (JHONSON; ONWUEGBUZIE, 2004, p. 17, apud YIN, 2010, p. 87).

A investigação propôs por meio da execução das ações e operações (categorias da ASP) estudar o efeito qualitativo na aprendizagem em derivadas parciais, conforme as características das etapas mentais. Desse modo, foi apresentado como característica sequencial a categorização das operações em forma de subcategorias da ASP em nível I, as ações da ASP em nível II e as características das ações do processo de assimilação em nível III, o qual permitiu a pesquisadora organizar as categorias resultantes em um modelo de inter-relações, possibilitando assim explicar como ocorreu o desempenho dos estudantes nas atividades realizadas.

O grupo único estudado foi observado em várias fases e passou por várias intervenções pedagógicas durante a realização da pesquisa, para que posteriormente os dados levantados durante este processo fossem analisados.

A pesquisa foi organizada em quatro momentos de acordo com o (Esquema 6), no momento 1, a pesquisadora buscou identificar situações que o professor no desenvolvimento do seu trabalho pode enfrentar. No momento 2, o professor deve decidir como conduzir os estudantes da zona de desenvolvimento real à potencial, neste instante se constrói a zona de desenvolvimento proximal.

Esquema 6 - Momento Geral da Pesquisa



Fonte: Elaborada pelo autor.

No momento 3, elabora-se se o plano de ensino de acordo com o nível de partida evidenciado pela prova diagnóstica, em conjunto com o sistema de ações da ASP, direção do processo de estudo e as etapas mentais no assunto de Derivadas Parciais nas características dos conteúdos matemáticos. No momento 4, foi realizada a análise por meio das informações coletadas e dispostas nos instrumentos de análise: provas e guias de observação.

2.2 MODELOS DA PESQUISA

Evidenciar-se-á os modelos de pesquisa utilizados neste trabalho, bem como o seu contexto desenvolvido dentro de cada enfoque buscando a apresentação dos resultados da aprendizagem.

2.2.1 Pesquisa Qualitativa

Neste enfoque os termos teóricos foram conceituados de forma abrangente, na composição da explicação final dos resultados da assimilação do conceito de derivadas parciais pelos estudantes, os quais determinaram a pesquisadora compreender por meio das aulas, provas de lápis e papel, atividades presenciais, videoconferência e ambiente virtual de aprendizagem, como ocorreu a aprendizagem dos estudantes, sempre levando em consideração que a investigação encontrava-se fundamentada nas etapas das ações mentais de Galperin.

Desse modo, consideramos que a fundamentação teórica exerce uma papel fundamental nesta pesquisa, pois de acordo com Creswell, a definição de teoria que concorda com Kerlinger (1979, p.64): uma teoria é “um conjunto de constructos (conceitos), definições e proposições inter-relacionados que apresentam uma visão sistemática dos fenômenos especificando as relações entre variáveis mensuradas, com o propósito de explicar os fenômenos naturais” (2010, p.79). Assim, por meio das ações da ASP usadas para resolver problemas matemáticos, foi possível destacar a análise do desempenho da aprendizagem de derivadas parciais e suas aplicações com fundamentação teórica nas etapas de formação das ações mentais.

Nesta perspectiva as ferramentas de compreensão que foram analisadas na aprendizagem em derivadas parciais estavam compostas por seus três níveis de categorias. As subcategorias representantes das operações no Nível I (operações adaptadas a partir do método da ASP, elaboração de Mendoza), foram ajustadas pelo método da ASP, as categorias no nível II (elementos adaptados do método de Polya) se destacavam quanto às ações da estratégia de ensino ASP e o nível III (etapas qualitativas das ações mentais de Galperin), que evidenciaram as etapas qualitativas da Formação das Ações Mentais. As categorias tiveram sua direcionalidade no contexto da pesquisa na assimilação das ideias do conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações, em concordância com a (Quadro 5):

Quadro 5 - Níveis de Categorias Qualitativas

Nível I – Categorias (Operações do Método da ASP)	Nível II - Categoria ASP	Nível III - Categorias Formação das ações mentais
a) Extrair os dados do problema. b) Determinar as condições do problema. c) Definir o(s) objetivo(s) do problemas.	Compreender o problema	Aprendizagem de Derivadas parciais por meio da ASP
a) Determinar as variáveis e incógnitas. b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas. c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições. d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático e critério de aprovação.	Construir o modelo matemático	Forma da ação Caráter generalizado
a) Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático. b) Solucionar o modelo matemático e o critério de aprovação.	Solucionar o modelo matemático	Caráter assimilação
a) Interpretar o resultado. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema. c) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema. d) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; e) Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.	Interpretar a solução	Caráter explanado Caráter de independência

Fonte: Adaptação de Mendoza, 2009.

As operações no nível I possibilitaram o detalhamento das ações realizadas pelos estudantes nas atividades e avaliações, que levaram ao desenvolvimento das ações no nível II em que se deu como destaque à interpretação da solução que, em conjunto com as etapas qualitativas do nível III, evidenciaram o processo de assimilação dos estudantes na forma da ação (material – mental), caráter generalizado (não generalizado – generalizado), caráter assimilação (consciente – automatizada), caráter explanado (detalhado – abreviado) e caráter de independência (compartilhado – independente) (MENDOZA; TINTORER, 2014, p.6).

Conforme (Tabela 2), por meio do tema central com a junção de suas categorias foi realizada a explanação do desempenho dos estudantes na ASP em Matemática visando alcançar o resultado final da pesquisa:

Tabela 2 - Categorias da Pesquisa Qualitativa

Tema	Categorias da ASP
Desempenho na resolução de problema no contexto de derivadas parciais. Uma função f de duas variáveis, x e y , é derivável em relação a x , permanecendo a variável y constante, denotada por, $f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, se o limite existir. Do mesmo modo, a derivada parcial de f em relação a y , permanecendo a variável x constante, denotada por, $f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, se o limite existir.	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o problema • Construir o modelo • Solucionar o modelo • Interpretar a solução

Fonte: Adaptação de Mendoza, 2009.

O desempenho qualitativo pelo qual foi demonstrado as características das ações, foram constatadas por meio das ações e operações do método das ASP no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações e realizada a definição dos termos e conceitos de análise no desempenho qualitativo de acordo com a ação essencial que foi posteriormente analisada na dimensão das ações mentais.

A descrição do desempenho das ações mentais estabelecidas a partir do desempenho qualitativo, descrevem o desenvolvimento dos estudantes. Nesta, foram utilizados os termos das características das ações de independente a dependente adaptadas de Mendoza (2013) para mostrar como ocorreu o processo de assimilação dos estudantes em cada teste aplicado. Pode-se, assim afirmar que a ASP e as ações mentais de Galperin permitiram o desenvolvimento do resultado final da análise qualitativa dos dados.

Destaca-se as seguintes classificações qualitativas desenvolvidas para a análise dos resultados da dimensão qualitativa das ações: Se todas as ações estiverem incorretas obterá a classificação de *incorreto* (1); Se a ação essencial não está correta mas possui outras ações pelo menos parcialmente correta obterá a classificação *razoavelmente correto* (2); Se a ação essencial está correta mas possui outras ações com erros obterá a classificação *correto* (3 e 4); e se todas as ações estiverem corretas obterá a classificação *totalmente correto* (5).

Estabeleceu-se a análise dos resultados por estudantes com a utilização do modelo dos (Quadro 6 e 7), o qual cada problema contextualizado com as ações da ASP e de acordo com o conceito (termos) de desempenho qualitativo, representados pela sua ação essencial, ora solucionar modelo e ora interpretar a solução sendo a ação destaque, foi possível verificar as soluções e assim mostrar o desempenho das ações conforme as etapas.

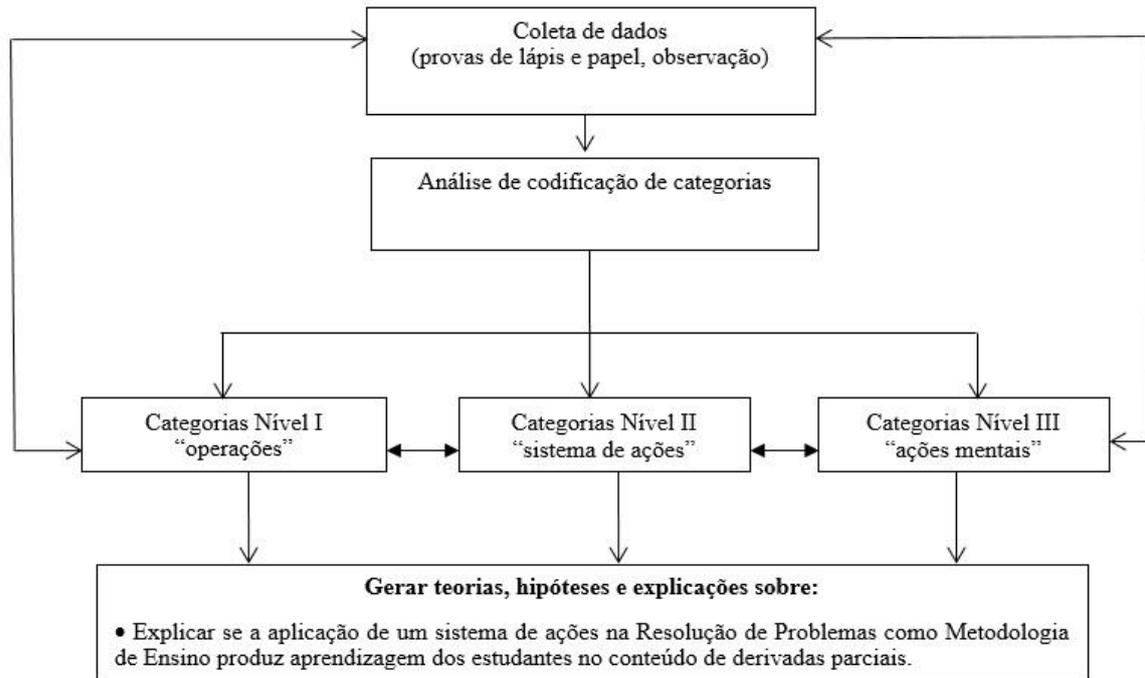
Quadro 6 - Modelo de Desempenho das Ações de Acordo com as Etapas Verbal Externa e Linguagem Externa

Aluno	Desempenho da Ação Verbal Externa (Ação Verbal)		Desempenho da ação em linguagem Externa (Linguagem Externa)	
	<i>Problema 1</i>	<i>Problema 2</i>	<i>Problema 3</i>	<i>Problema 4</i>
A-01				
A-02				
A-03				
A-04				
A-05				

Quadro 7 - Modelo Desempenho das Ações de Acordo com a Etapa Mental

Aluno	Desempenho das Ações Mentais			
	<i>Problema 1</i>	<i>Problema 2</i>	<i>Problema 3</i>	<i>Problema 4</i>
A-01				
A-02				
A-03				
A-04				
A-05				

Figura 1 - Procedimentos da Teoria Fundamentada



Fonte: Adaptação de Sampieri, 2006.

A sucessão do processo qualitativo conforme a (Figura 1), englobou a coleta de dados por meio dos instrumentos prova diagnóstica, formativa e final como também as observações realizadas nas aulas práticas no polo e aula de videoconferência pelo qual os dados foram analisados de acordo com os três níveis de categorias, que teve como indicador essencial (interpretar a solução) o que levou a compreensão dos resultados obtidos pelos estudantes. Os níveis de categorias operações, ações e as etapas qualitativas das ações mentais possibilitaram explicar como ocorreu a aprendizagem dos estudantes no conteúdo de derivadas parciais e aplicações.

Na finalização do resultado da investigação, os dados passaram por uma leitura minuciosa que teve como objetivo mostrar de maneira consistente as ações desempenhadas, a qual foram transcritas para o formulário de análise descritiva, embasado nos parâmetros da resolução de análise em conjunto com o comentário da pesquisadora.

2.2.2 Pesquisa Quantitativa

Embasando-se nos estudos metodológicos de Sampieri (2006) e Moreira (2011), a medição foi aplicada englobando um tratamento “X”, (variável independente) que representava o sistema de ações que foram executados, em que se observou a causa e a relação a “Y” (variável dependente), representando a aprendizagem. O grupo único primeiramente foi submetido a um pré-teste (avaliação diagnóstica), e em seguida foi iniciada a apresentação das ideias básicas de

derivadas de função de uma variável prosseguindo com derivadas parciais, desenvolvidas por meio das situações problemas interpostas com as etapas das ações mentais, em que finalizou com o pós-teste (avaliação final), conforme ilustração do modelo:

Quadro 8 – Processo de Intervenção

Etapas Mentais	1ª Etapa	2ª Etapa	3ª Etapa	4ª Etapa	5ª Etapa
Avaliação Diagnóstica O_0	$X_{E1} O_1$	$X_{E2} O_2$	$X_{E3} O_3$	$X_{E4} O_4$	Avaliação Final $X_{E5} O_5$

Legenda: O_0 (Nível de partida, Avaliação diagnóstico); $X_{E1} O_1$ (Etapa 1: Intervenção da BOA); $X_{E2} O_2$ (Etapa 2: Materializada – aulas teóricas, práticas e videoconferência); $X_{E3} O_3$ (Etapa 3: Linguagem Verbal – aulas práticas e avaliação formativo 1); $X_{E4} O_4$ (Etapa 4: Linguagem Externa para Si – videoconferência, aulas presenciais e avaliação formativo 1); $X_{E5} O_5$ (Etapa 5: Ações Mentais (Linguagem Interna) – aulas práticas, videoconferência e avaliação final).

O grupo escolhido de acordo com a ilustração, no nível de partida foram submetidos à avaliação diagnóstica O_0 , contendo o assunto de derivada de função de uma variável, por conseguinte foi realizada a intervenção primeiramente com a elaboração do planejamento de aplicação da BOA, de maneira a forma as ideias conceituais de derivadas parciais, determinadas por $X_{E1} O_1$ (Etapa 1: Intervenção da BOA). Nesse sentido, a primeira etapa das ações mentais teve como objetivo a compreensão do conteúdo pelos estudantes através da descrição da Avaliação diagnóstica de acordo com as etapas da ASP, bem como os slides com assunto, as atividades planejadas, todas estas disponibilizadas no ambiente AVA, e que foram debatidas pelo professor nas videoconferências e aulas de tira-dúvidas no polo.

A intervenção $X_{E2} O_2$ (Etapa 2: Ação Materializada) apresentou como destaque as aulas teóricas por meio do ambiente virtual de aprendizagem, videoconferência e aulas práticas no polo, a qual foram aplicadas situações problemas envolvendo a área da medicina, economia e produção, resolvidos por meio da ASP em explicação pelo professor nestas aulas e também executadas pelos estudantes em forma de atividade, assegurando assim a formação da ação materializada em conjunto com as orientações da BOA.

Referindo-se a intervenção $X_{E3} O_3$ (Etapa 3: Ação Verbal), esta apresentou-se na forma escrita visto que se tratava de um curso da modalidade a distância, que na maioria do tempo os alunos desenvolvem suas atividades sem a participação do professor. Nesta etapa, os estudantes resolveram problemas contextualizados no assunto de derivadas parciais nas aulas práticas.

Dando seguimento com a intervenção $X_{E4} O_4$ (Etapa 4: Linguagem Externa) esta foi consolidada por meio das anteriores, nesta os estudantes internalizam as aplicações de

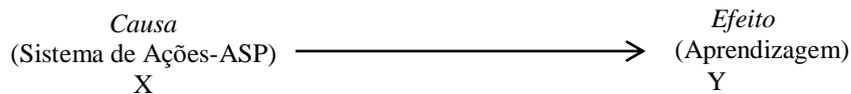
derivação parcial, que foi observada verbalmente por meio da aula presencial de tira-dúvidas e de maneira descritiva de acordo com a resolução dos problemas “produtividade marginal” e “análise marginal” conforme o sistema de ações da ASP.

Por fim, o procedimento realizado neste momento $X_{E5} O_5$ (Etapa 5: Linguagem Interna) levou a formação da ação na linguagem interna, do conceito de derivadas parciais e sua aplicação pelos estudantes na aplicação da avaliação final e das atividades. Ressalta-se que nesta etapa foi possível verificar com ênfase a ASP, e de maneira superficial as ações mentais.

Assim sendo, pode-se perceber que o grupo escolhido para investigação foi submetido a ocasiões de observação nas aulas presenciais, videoconferência e Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), aplicação de pré-teste, aulas teóricas e práticas e pós-teste representadas por variáveis expressadas na forma quantitativa nas dimensões alcançadas, de maneira referida na pesquisa qualitativa, construída por um sistema de quatro ações qualitativas: *i*) compreender o problema; *ii*) construir o modelo matemático; *iii*) resolver o modelo matemático e *iv*) interpretar a solução (MENDOZA, 2009).

De acordo com o sistema de ações, foi possível quantificar, a dimensão da aprendizagem dos estudantes, por meio da utilização das categorias qualitativas de causa e efeito, que se encontravam determinada na seguinte forma (Esquema 7):

Esquema 7 - Aplicação do Sistema de Ações



As análises foram realizadas a partir da seleção de problemas das atividades de testes resolvidos pelos estudantes, de maneira a realizar a análise nas variáveis quantitativas, que teve como base as categorias qualitativas das ações de forma a apresentar valores por meio da escala Likert, em que cada problema continha seu indicador principal (SAMPIERI, 2006, p. 287).

Nesta investigação foi explicitada por definição a variável qualitativa como “sistema de ações da ASP(X)” e a variável quantitativa “aprendizagem da ASP em Derivadas Parciais (Y)”. Apresentou-se como variável qualitativa interveniente a formação por etapas das ações mentais. No que concerne a variável qualitativa “o sistema de ações da ASP(X)” esta instituído por quatro ações: compreender o problema (X_1), construir o modelo matemático (X_2), solucionar o modelo matemático (X_3) e interpretar a solução (X_4), na atividade de situações problema em derivadas parciais.

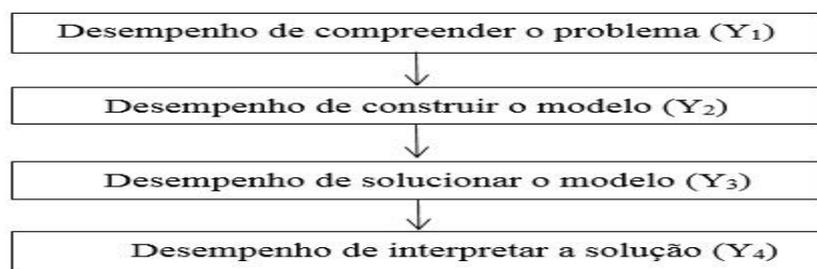
Prosseguindo, a variável quantitativa foi caracterizada pelo “desempenho na resolução de problema (Y)” em que seu resultado se triangulou com a pesquisa qualitativa. Destacando

assim, a Variável Independente “X” pelas orientações do sistema de ações da ASP. E a Variável Dependente “Y” representada pelo Desempenho na Resolução de Problemas fundamentada nas Etapas Mentais de Galperin.

No entanto, quanto a definição conceitual, esta se estabeleceu na observação das habilidades do processo de assimilação dos estudantes na resolução de problemas matemáticos de modo a expandi-los a outras situações. Na definição operacional observa-se o desempenho dos estudantes, no qual faz-se a comparação do nível de partida em conjunto com as outras fases até o teste final, objetivando a resolução de problemas e sua aplicação em novos contextos.

Os dados encontrados foram relacionados entre si, formando uma conclusão de dados quantitativos, estabelecidos pela dimensão da categoria qualitativa (Esquema 8), em observância a representação da (Esquema 9) das variáveis independente “X” e dependente “Y” de causa e efeito, conforme o sistema de ações.

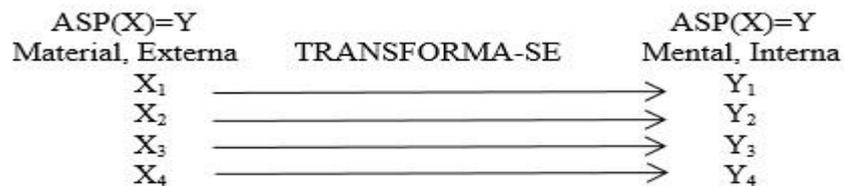
Esquema 8 - Dimensão das Variáveis no Quantitativo



Fonte: Adaptação de Mendoza, 2009.

Esquema 9 - Variáveis e Sistema de Ações

Sistema de ações



Fonte: Mendoza, 2009.

O (Esquema 9) representou na pesquisa o desenvolvimento das transformações ocorridas, iniciadas por ASP(X) = Y, material, externa e finalizadas com ASP(X) = Y, mental interna, que se fez necessário transpor as cinco etapas qualitativas para forma as ações mentais.

Como forma de contribuição, a etapa motivacional encontra-se presente durante todo o caninho percorrido.

O resultado quantitativo a partir da escala *Likert*, foi representado por cada dimensão (Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4) e demonstrada no (Esquema 8 e 9), o qual se aplicou uma escala de 1 até 5 pontos com o critério: Se todos os indicadores estão incorretos, obterá a qualificação de um (1); Se o indicador essencial está incorreto ou parcialmente incorreto e/ou existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de dois (2); Se o estudante tem somente correto o indicador essencial, obterá a qualificação de três (3); Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto, obterá a qualificação de quatro (4); e se todos os indicadores estão corretos, obterá qualificação de cinco (5).

No Quadro 9, os indicadores essenciais foram apresentados de acordo com sua importância de análise, desse modo cada problema teve seu indicador de maior relevância.

Quadro 9 – Característica da variável quantitativa

<i>Dimensão</i>	<i>Indicador</i>	<i>Indicador Essencial</i>
Y_1	a) O estudante extrai os dados do problema. b) O estudante determina as condições do problema. c) O estudante define o(s) objetivo(s) do problema.	c)
Y_2	a) Determinar as variáveis e incógnitas. b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas. c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições. d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático e critério de aprovação.	c)
Y_3	a) Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático. b) Solucionar o modelo matemático e o critério de aprovação.	a)
Y_4	a) Interpretar o resultado. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema. c) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema. d) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.	c)

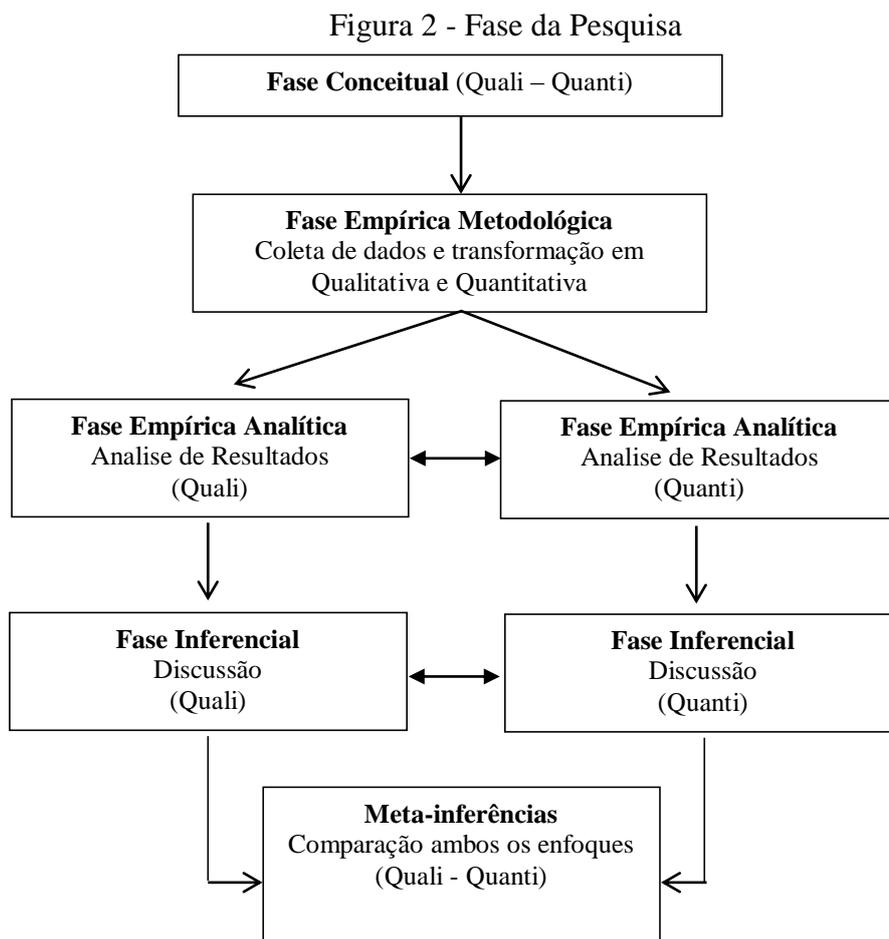
Fonte: Mendoza, 2009.

Nesta pesquisa foi realizada a comparação do desempenho inicial (avaliação diagnóstica) e posterior (avaliação formativa e final) a intervenção pedagógica (Y_0 vs Y_1), com o uso de uma escala *Likert*, para conhecer a dimensão do desempenho dos estudantes na resolução de problema com aplicação dos conceitos de derivadas parciais.

2.2.3 Pesquisa Mista

A pesquisa apresentou-se de acordo com o modelo misto com enfoque qualitativo como o dominante. No que se refere à fase conceitual deste enfoque, esta permitiu relacionar o método da ASP nos dois enfoques, a qual prosseguiu com o sistema metodológico da fase empírica em que se realizou a coleta de dados para análise por meio de problemas que foram resolvidos pelos

estudantes e bem como por meio da explanação das aulas práticas anotadas no diário de pesquisa inicialmente em derivadas de funções de uma variável e posteriormente em derivadas parciais e suas aplicações. As atividades e as provas com as respostas dos estudantes, foram transferidas para um formulário de análise na forma qualitativa e posteriormente quantitativa. Por conseguinte, as respostas foram conduzidas à fase inferencial da discussão de maneira autônoma. Por fim, foram evidenciados os resultados da análise através da elucidação comparativa dos dois enfoques. Conforme demonstra a (Figura 2).



Fonte: Adaptação de Sampieri, 2006.

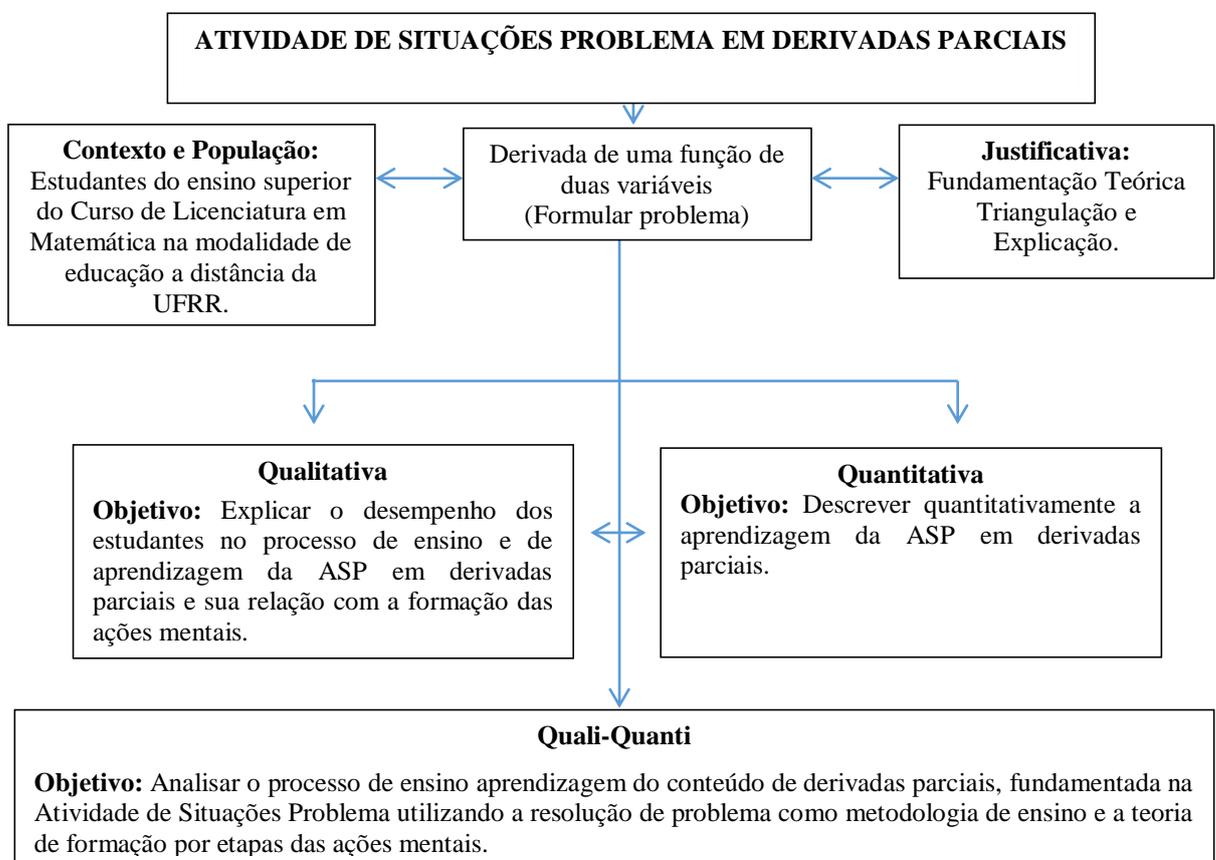
A organização da problemática da pesquisa de acordo com sua estrutura permitiu mostrar evidências na aprendizagem dos estudantes no conteúdo de derivadas de função de duas variáveis, que foi composta pelos elementos “contexto e população” e justificativa, na utilização do método. Os objetivos das características expressas, possibilitaram apresentar resultado da aprendizagem dos estudantes na utilização do sistema de ações da ASP em derivadas parciais auxiliados pelos modelos.

O sistema de quatro ações com suas respectivas operações na resolução de problemas desenvolvidos por Mendoza (2009), foi adaptado e utilizado no estudo de derivadas parciais e

suas aplicações, este sistema foi de suma importância para a realização da análise do desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes. A teoria das ações mentais de Galperin esteve presente em todo o processo desenvolvimento, a qual iniciou no terceiro momento da didática, mais precisamente na elaboração do plano de ensino considerando as etapas mentais e do plano de aula por meio da BOA que se estendeu até o final das aulas, no estudo da aprendizagem em derivadas parciais pelos estudantes.

No qualitativo as ações e operações do método das ASP no conteúdo de derivadas parciais são chamadas de categorias e no quantitativo são convertidas em variáveis. Ambos os enfoques contribuíram entre si nos procedimentos da pesquisa na utilização da ASP em diversos momentos. Examinou-se o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem amparada nestes enfoques, conforme a (Figura 3).

Figura 3 - Problemática da Pesquisa

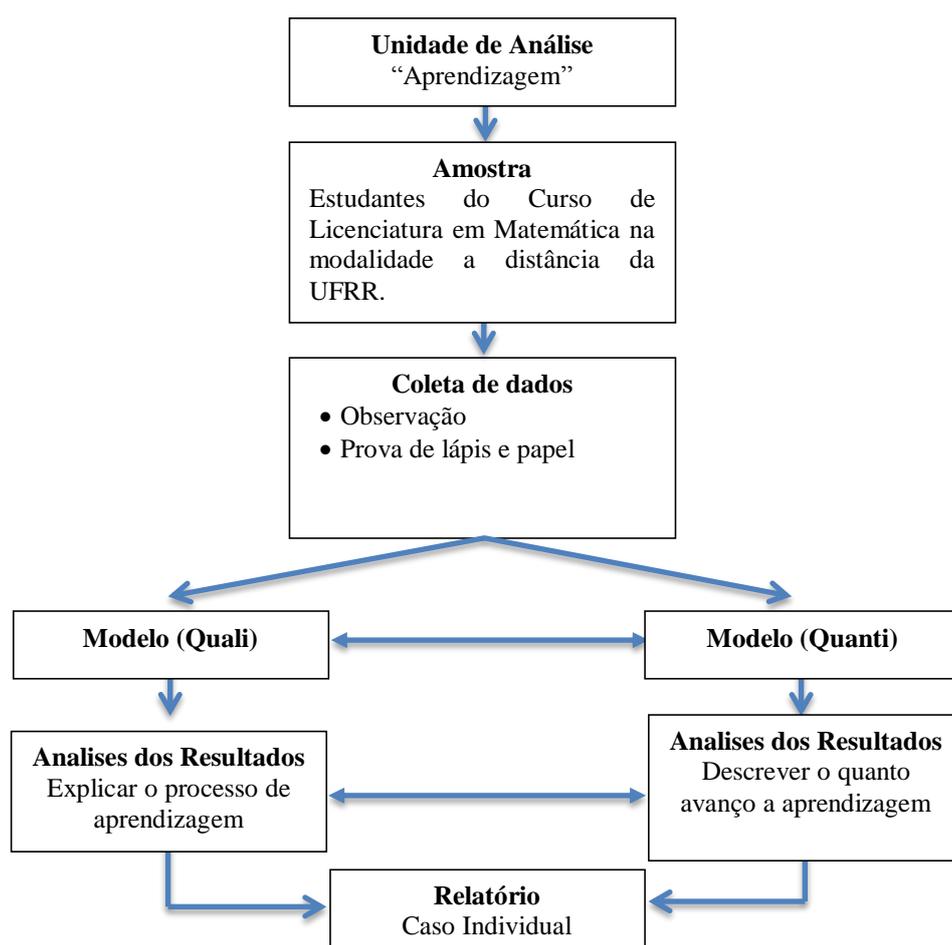


Fonte: Adaptação de Sampieri, 2006.

Desse modo, destaca-se que este trabalho possui resultados qualitativos e quantitativos referentes à aprendizagem, do conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações por meio de situações problemas utilizando de forma prática a ASP. Sendo que os instrumentos foram aplicados primeiramente no qualitativo e após no quantitativo por meio de variáveis.

Conforme demonstra o (Figura 4), foi utilizado o caso único, tendo uma única unidade de análise a “aprendizagem” dos estudantes no conteúdo de derivadas parciais. Nesse sentido a investigação envolveu apenas uma turma do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância da UFRR, em que foram coletados dados referente à aprendizagem dos estudantes por meio da ASP e da formação por etapas das ações mentais. Os estudantes pertenciam ao Polo do município de Alto Alegre/RR, e estavam matriculados na disciplina de cálculo III.

Figura 4 – Estrutura do estudo de caso



Fonte: Adaptação de Sampieri, 2006.

A “aprendizagem”, evidencia-se dentro da amostra por meio dos dados coletados na observação, prova de lápis e papel e atividades desenvolvidas no ambiente virtual de aprendizagem (AVA), primeiramente, fazendo uso da sondagem e das técnicas qualitativas, permitindo que os dados fossem analisados posteriormente nas unidades integradas, de acordo com a estrutura exposta.

2.3 AMOSTRA

De acordo com Sampieri (2006), no enfoque quantitativo a amostra é considerada um subgrupo a qual se pretende realizar a investigação. No enfoque qualitativo, a amostra é representada por uma unidade de análise ou grupo de pessoas, contextos, eventos, fatos, comunidades etc, que se coleta dados. Conforme a elaboração da pesquisa em questão a amostra escolhida foi a não-probabilística, em que a escolha dos componentes da população da amostra, de certa forma dependeram em parte do julgamento da pesquisadora.

Desse modo, com base em Sampieri, o universo da pesquisa foram os estudantes do curso de licenciatura em matemática na modalidade a distância da UFRR, a amostra esteve composta por um grupo de 09 acadêmicos do Polo da EaD no município de Alto Alegre, que cursaram a disciplina de Cálculo III. A escolha da referida matéria se deu pelo fato de ser uma das disciplinas que estava sendo ofertada no 1º semestre de 2014 nesta modalidade de ensino, a qual possibilitou o desenvolvimento da investigação, não havia no Estado outras Instituições Públicas ofertando a disciplina de cálculo no mesmo período.

2.4 COLETA DE DADOS

A coleta de dados foi realizada por meio dos instrumentos selecionados, os quais foram aplicados e preparados em forma de registro e observações, possibilitaram que os dados fossem analisados corretamente. Nesta pesquisa foi utilizado um instrumento que apresentou elementos qualitativos e quantitativos (SAMPIERI, 2006).

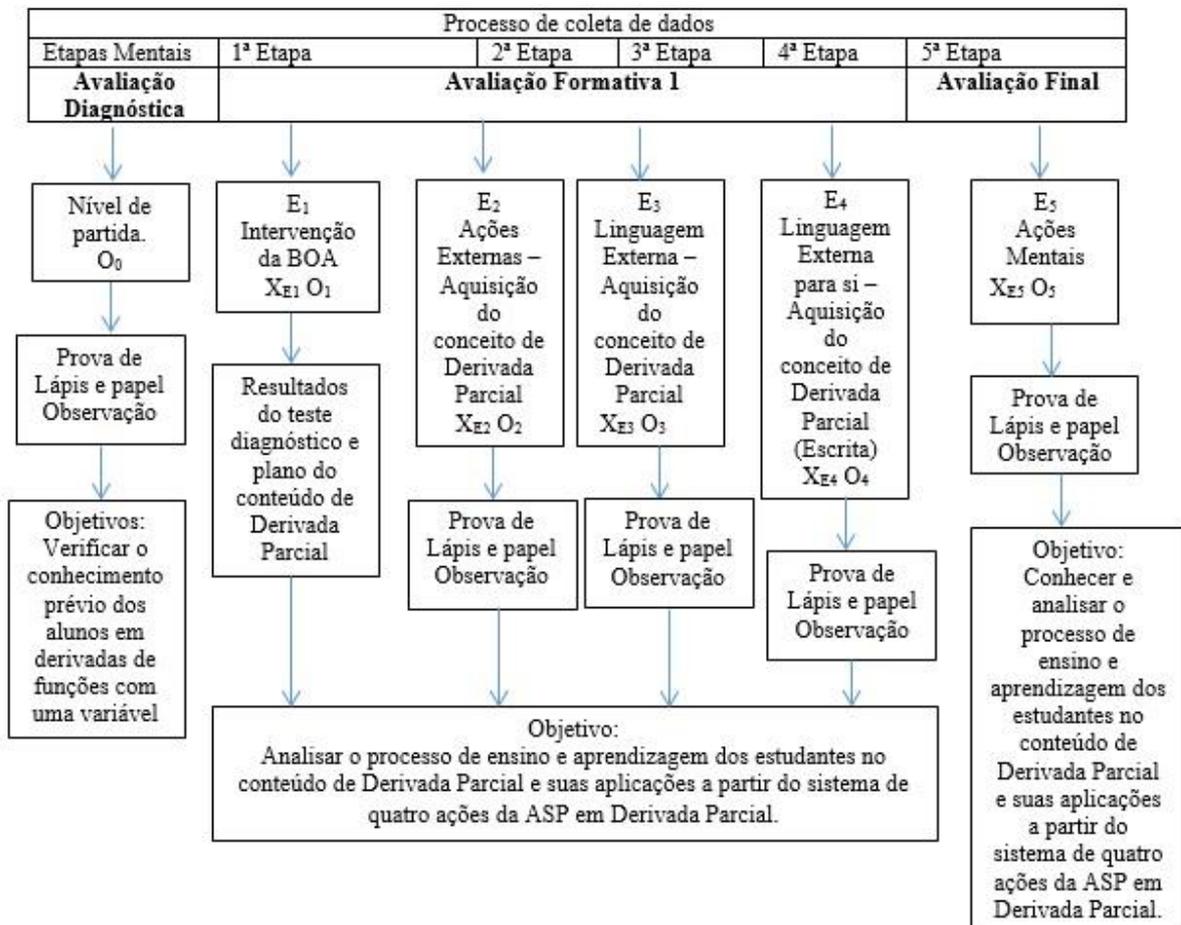
A pesquisa apresentou sua predominância no enfoque qualitativo, o que levou a desenvolver um instrumento que primeiramente continha elementos qualitativos e, por conseguinte, quantitativo que foi usado com o objetivo de responder às indagações da investigação.

Compreende-se de Sampieri (2006, p. 375) que a coleta de dados no enfoque qualitativo, visa a obtenção de informações “[...] de indivíduos, comunidades, contextos, variáveis ou situações em profundidade, nas próprias “palavras”, “definições” ou “termos” dos indivíduos em seu contexto”, o qual tem como finalidade a realização da análise dos dados coletados de forma a responder a questões de pesquisa ou gerar conhecimento.

2.4.1 Instrumentos

Devido à importância de selecionar e aplicar um instrumento na coleta de dados com vistas a atingir um resultado, foi escolhido alguns componentes para que a análise fosse realizada corretamente. Dentre os quais foram utilizados a observação direta, descrição comportamental, visita em campo, prova de lápis e papel e videoconferência.

Figura 5 – Processo de Coleta de Dados



Fonte: Elaborada pelo autor.

A (Figura 5), mostra como ocorreu o processo da coleta de dados por meio das etapas de assimilação em sua ordem, em conjunto com as avaliações: diagnóstica, formativa e final. No conteúdo de derivadas de função de uma variável (avaliação diagnóstica) e derivadas parciais e suas aplicações nas demais avaliações.

Figura 6 - Instrumentos de coleta de dados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Expressa-se na (Figura 6) os instrumentos utilizados para obtenção dos dados necessários para a análise e descrição do resultado final da pesquisa.

2.4.2 Provas de Lápis e Papel

A avaliação foi realizada principalmente por meio das provas de lápis e papel de caráter qualitativo e quantitativo englobando as dimensões da ASP em Matemática e o processo de assimilação de formação das ações mentais de Galperin. Na pesquisa, foram analisadas três provas de lápis e papel: uma diagnóstica, uma formativa e uma final contendo em cada prova quatro questões. Em que se buscou informações através das categorias da ASP e das ações mentais.

Para a descrição da análise das provas também foi destacado as respostas dos estudantes por tentativa de ensaio e erro, com base em Cury (2008), que realizou pesquisa analisando e classificando erros dos alunos de forma a contribuir com a solução das dificuldades dos estudantes.

De acordo com Lopes, citado por Cury, “a relevância do tema “erros” ou da análise das respostas dos alunos tem importância crucial em muitas outras frentes da Educação Matemática atual, seja na definição de parâmetros curriculares, na análise de materiais didáticos ou na formação de professores” (2008, p. 12).

Por meio do uso das provas de lápis e papel foi possível conhecer o desenvolvimento da aprendizagem de maneira descritiva e determinar o desempenho obtido pelos estudantes na aprendizagem do conceito de Derivadas Parciais fazendo uso da resolução de problemas matemáticos. Desse modo, serão evidenciados neste momento os quatro problemas aplicados

no teste diagnóstico, as provas das demais fases encontram-se explícitas nos resultados da investigação.

Problema1: Determine a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 4,9x^2$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$

c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$

d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$

e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$

O problema (P-01) é considerado tradicional e se fazia necessário o uso do conceito de derivada de funções de uma variável e das regras de derivação, para sua resolução que, conforme a sua resolução pelos estudantes de maneira descritiva, foi possível determinar o grau de compreensão destes quanto aos conhecimentos prévios para posteriormente estudar o conteúdo de derivadas parciais.

Pretendia-se que os acadêmicos resolvessem a derivada da função com uma variável, que está relacionada com a terceira ação das ASP, solucionar o modelo matemático.

Os problemas foram expressos de acordo com os parâmetros exposto no (Quadro 14) por meio das ações essenciais e não essenciais de cada problema. Nesse sentido o (P-01) tinha como objetivo: executar a resolução do modelo matemático fazendo uso da definição de derivada de função de uma variável e as regras de derivação pelos estudantes no referido problema.

Para a realização da análise foi necessário observar os aspectos pré-estabelecidos por meio dos conceitos matemáticos de derivada de função de uma variável indispensável ao conteúdo de derivada parcial posteriormente estudado. Assim, no (Quadro 10) foram descritos os parâmetros do primeiro problema.

Quadro 10 - Parâmetros do Problema 1

Categoria	Operações de Parâmetros Conceituais para Análise do Problema 1
A terceira ação: <i>solucionar o modelo da derivada de uma função</i>	Método para solucionar: Derivada de função de uma variável. Solucionar o modelo: calcular as funções encontrando o resultado por meio do uso da regra da potência, da constante, da soma e do quociente.

Problema 2: Um empresário calcula que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o lucro é dado por $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades? Justifique a sua resposta.

O (P-02) contextualiza a aplicação do conceito de derivada de uma função onde o aluno poderá desenvolver os cálculos por meio da definição formal ou das regras de derivação estudadas para determinar a taxa da variação do lucro em relação ao nível de uma produção em

relação a uma quantidade produzida. O problema está relacionado com a quarta ação interpretar a solução.

Quadro 11 - Parâmetros do Problema 2

Categoria	Operações de Parâmetros Conceituais para Análise do Problema 2
A primeira ação: compreender o modelo da derivada parcial	<p>Ler e extrair os elementos desconhecidos: não se aplica, os elementos são de conhecimento dos alunos.</p> <p>Os dados do problema: a taxa de variação em relação a x de certa quantidade produzida.</p> <p>As condições: determinar a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x em relação a uma quantidade produzida.</p>
A segunda ação: identificar o modelo da derivada parcial	<p>Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: x unidades de um certo produto.</p> <p>Construção do modelo: não se aplica, o modelo já foi dado no problema $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ reais.</p>
A terceira ação: solucionar o modelo da derivada parcial	<p>Método para solucionar: Derivada de função de uma variável.</p> <p>Solucionar o modelo: calcular a função em relação a variável x fazendo uso da regra da potencia e da constante para chegar ao resultado. $f'(x) =$</p> $\frac{[-400(x+h)^2 + 6.800(x+h) - 12.000] - (-400x^2 + 6.800x - 12.000)}{h}$ $= \frac{[-400(x^2 + 2xh + h^2) + 6.800x + 6.800h - 12.000] + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h}$ $= \frac{-400x^2 - 800xh - 400h^2 + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h}$ $= \frac{-800xh - 400h^2 + 6.800h}{h}$ $= -800x - 400h + 6.800$ $= -800x + 6.800$ <p>ou</p> $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ $f'(x) = -400(2x^1) + 6.800(1x^0) - 0$ $= -800x + 6.800$
A quarta ação: interpretar a solução do modelo da derivada parcial	<p>Apresentar resposta ao objetivo do problema: Tanto pela definição formal de derivadas ou utilizando as regras de derivação identifica-se que, quando o nível de produção é $x = 9$ (9.000 unidades), o lucro está variando a uma taxa de $f'(9) = -800(9) + 6.800 = -400$ reais por mil unidades. Isto significa que, para um nível de produção de 9.000 unidades, o lucro diminui quando a produção aumenta.</p>

Problema 3: Um fabricante de câmeras digitais estima que, quando x centenas de câmeras são produzidas, o lucro total é $f(x) = -0,0035x^3 + 0,07x^2 + 25 - 200$ milhares de reais.

- Determine a função lucro marginal.
- Determine o lucro marginal para níveis de produção $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.
- Interprete os resultados do item (b).

O (P-03) classifica-se com as mesmas características de aplicação de conceitos, no entanto, com o acréscimo de um novo o lucro marginal. No qual o aluno deverá determinar a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x em relação a uma quantidade produzida expressando a interpretação da ação com um breve relato descrito, o problema está relacionado com a terceira ação da ASP, solucionar o modelo matemático, como a principal.

Quadro 12 - Parâmetros do Problema 3

Categoria	Operações de Parâmetros Conceituais para Análise do Problema 3
A primeira ação: compreender o modelo da derivada de função de uma variável	<p>Ler e extrair os elementos desconhecidos: o significado de estima, lucro total e lucro marginal.</p> <p>Os dados do problema: a taxa de variação em relação a x de certa quantidade produzida.</p> <p>As condições: determinar a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x em relação a uma quantidade produzida.</p>
A segunda ação: identificar o modelo da derivada de função de uma variável	<p>Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: x representa as unidades de um certo produto; os níveis de produção são $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.</p> <p>Construção do modelo: não se aplica, o modelo já foi dado no problema $f(x) = -0,0035x^3 + 0,07x^2 + 25 - 200$ milhares de reais.</p>
A terceira ação: solucionar o modelo da derivada de função de uma variável	<p>Método para solucionar: Derivada de função de uma variável.</p> <p>Solucionar o modelo: calcular a função em relação a variável x, como também para os valores determinados para x, fazendo uso da regra da potencia e da constante para chegar ao resultado.</p> <p>a) O lucro marginal é dado pela derivada</p> $f'(x) = -0,0035(3x^2) + 0,07(2x) + 25$ $= -0,0105x^2 + 0,14x + 25$ <p>b) Os lucros marginais para $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.</p> $f'(10) = 0,0105(10)^2 + 0,14(10) + 25 = 25,35$ $f'(50) = 0,0105(50)^2 + 0,14(50) + 25 = 5,75$ $f'(80) = -0,0105(80)^2 + 0,14(80) + 25 = -31$
A quarta ação: interpretar a solução do modelo da derivada de função de uma variável	<p>Apresentar objetivo do problema: O relatório descritivo deve expor as ideias aplicadas pelo estudante, conforme os conceitos de derivada de uma função e suas regras, bem como a maneira compreendida, em termos matemáticos: fato de que $P'(10) = 25,35$ significa que um aumento de 1 unidade no nível de produção de 10 para 11 centenas de câmeras aumenta o lucro em aproximadamente 25,35 milhares de reais (R\$ 25.350,00), o que justifica um esforço do fabricante para aumentar a produção. Por outro lado, como $P'(50) = 5,75$, o aumento do nível de produção de 50 para 51 unidades aumenta o lucro em apenas R\$ 5.750,00, o que talvez não seja um incentivo suficiente para aumentar a produção. Finalmente, como $P'(80) = -31$, um número negativo, aumentar a produção de 80 para 81 unidades resultaria em uma redução de R\$ 31.000,00 no lucro da empresa. Nesse caso, o fabricante deveria considerar seriamente a possibilidade de reduzir a produção.</p>

Problema 4: Um fabricante estima que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o custo total é $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ reais e que todas as x unidades são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais por unidade.

- Determine o custo marginal e a receita marginal.
- Use o custo marginal para estimar o custo para produzir a nona unidade.
- Qual é o custo real para produzir a nona unidade?
- Use a receita marginal para estimar a receita obtida com a venda da nona unidade.
- Qual é a receita real obtida com a venda da nona unidade?

O (P-04) aborda, as mesmas características de aplicação de conceitos dos problemas anteriores, no entanto, com o acréscimo de novos como: custo real, receita marginal e receita real, o qual apresenta um nível de complexidade mais elevado para encontrar a solução. De modo que o aluno calcule cada um dos valores aplicando as regras de derivação: para encontrar as respostas dos incisos, nos quais: a) está relacionado com a ação solucionar o modelo matemático, e nos incisos b) e c) referem-se a ação solucionar o modelo matemático e interpretar a solução, os incisos d) e e) estão relacionados com a quarta ação interpretar a

solução. E assim, relacionar todos esses elementos necessários para determinar a venda da nona unidade de um certo produto.

Quadro 13 - Parâmetros do Problema 4

Categoria	Operações de Parâmetros Conceituais para Análise do Problema 4
A primeira ação: compreender o modelo da derivada parcial	<p>Ler e extrair os elementos desconhecidos: o significado de estima, custo total custo marginal e receita marginal; a) determine o custo marginal e a receita marginal; b) estimar o custo para produzir a nona unidade por meio do custo marginal; c) o custo real para produzir a nona unidade; d) estimar a receita obtida com a venda da nona unidade e) a receita real obtida com a venda da nona unidade.</p> <p>Os dados do problema: x unidades de um certo produto são fabricadas</p> <p>As condições: relacionar os elementos necessários para determinar a venda da nona unidade.</p>
A segunda ação: identificar o modelo da derivada parcial	<p>Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: x representa as unidades vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais por unidade.</p> <p>Construção do modelo: não se aplica, o modelo já foi dado no problema $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ reais.</p>
A terceira ação: solucionar o modelo da derivada parcial	<p>Método para solucionar: Derivada de função de uma variável.</p> <p>Solucionar o modelo: calcular a função em relação a variável x, fazendo uso da regra da potencia e da constante para chegar ao resultado.</p> <p>a) O custo marginal é $C'(x) = \frac{x}{4} + 3$. Como x unidades do produto são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais, a receita total é</p> $R(x) = (\text{número de unidades vendidas})(\text{preço unitário})$ $= xp(x) = x \left[\frac{1}{3} (75 - x) \right] = 25x - \frac{1}{3}x^2$ <p>A receita marginal é</p> $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$ <p>b) O custo para produzir a nona unidade é igual à variação do custo quando x aumenta de 8 para 9 e pode ser estimado pelo custo marginal</p> $C'(8) = \frac{1}{4}(8) + 3 = R\$ 5,00$ <p>c) O custo real para produzir a nona unidade é</p> $C(9) - C(8) = R\$ 5,13 \text{ que não é muito diferente do custo marginal } C'(8) = R\$ 5,00.$ <p>d) A receita obtida com a venda da nona unidade pode ser estimada pela receita marginal</p> $R'(8) = 25 - \frac{2}{3}(8) = R\$ 19,67$ <p>e) A receita real obtida com a venda da nona unidade é</p> $R(9) - R(8) = R\$ 19,33$
A quarta ação: interpretar a solução do modelo da derivada parcial	<p>Resposta ao objetivo do problema: Deverá descrever o custo real e o custo total de maneira a determinar receita marginal e real da nona unidade.</p>

Conforme a (Tabela 3), apresenta-se um resumo das provas de lápis e papel evidenciando sua aplicação realizada na investigação, de acordo com a descrição dos resultados dos problemas dos estudantes, em que se considerou a ação essencial e os indicadores quantitativos, acompanhadas do desempenho qualitativo do estudante por meio das ações da ASP e estabelecido pelo desempenho quantitativo. O qual foi descrito com a seguinte legenda “~” ausência de informações relacionada a ação; “I”, presença de informações sobre a ação; “?” existem perguntas relacionadas com a ação, podendo ocorrer a não existência de perguntas mas pretende-se buscar informações sobre a ação; “I~” presença de informações sobre a ação e

ausência de informações relacionada a ação; “I?” presença de informações sobre a ação e existência de perguntas relacionadas com a ação; “P” 1ª A, ação compreender o problema; 2ª A construir o modelo matemático; 3ª A, solucionar o modelo matemático e 4ª A, interpretar a solução.

Tabela 3.- Análise da Avaliação Diagnóstica					
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	Contexto do Problema
nº 1	~	~	?	~	Resolver a derivada da função com uma variável. O modelo matemático é $f'(x)$
nº 2	I	I	I?	I?	Encontrar a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades. O modelo matemático é $f'(x)$
nº 3	I	I	?	?	Determine a função lucro marginal, o lucro marginal para níveis de produção $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$. O modelo matemático é $f'(x)$
nº 4	I~	I	?	?	Determine o custo marginal e a receita marginal, o custo marginal e o custo real para produzir a nona unidade, a receita marginal e a receita real obtida com a venda da nona unidade. O modelo matemático $f'(x)$

Características Gerais

- Todos os problemas são de baixa complexidade relacionado a conteúdo do Cálculo I.
- Todas tem a mesma definição: a derivada da função $f(x)$, em relação a x é a função $f'(x)$.
- Na pergunta 3 tem incisos que estão relacionados com duas ações.
- Na pergunta 4 tem incisos que estão relacionados com duas ações.

Dando prosseguimento, também foi criada a (Tabela 4) representando os resultados da avaliação da fase formativa, em que foram escolhidos quatro problemas para serem analisados nesta etapa:

Tabela 4 – Análise da Avaliação Formativa					
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	Contexto Essencial do Problema
nº 1	~	~	?	~	Resolver a derivada parcial em relação a x e y , de acordo com a definição. O modelo matemático é $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.
nº 2	I?	I	I?	?	Estime a variação da área superficial do corpo da criança se ela engordar 1 Kg e altura permanecer inalterada. O modelo matemático é $S_w(W, S)$ e $S_H(W, S)$.
nº 3	I	I	I?	?	Determinar a produtividade do capital Q_k e da mão de obra Q_L . O fabricante deve aumentar o investimento ou a mão de obra para aumentar rapidamente a produtividade. O modelo matemático é $Q_k(K, L)$ e $Q_L(K, L)$.
nº 4	I?	I?	?	?	Interpretar a estimação da variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante. O modelo matemático é $Q_x(x, y)$ e $Q_y(x, y)$

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Para a fase final, também foi construída a (Tabela 5) com os resultados dos quatro problemas que foram utilizados no teste final de derivada parcial e suas aplicações para serem analisados:

Tabela 5 – Análise da Avaliação Final					
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	Contexto Essencial do Problema
nº 1	I	I	?	I?	Determinar a população de um certo país daqui a 7 anos? O modelo matemático é $P(A, K, t) = Ae^{kt}$.
nº 2	I~	I	I?	?	Interpretar o resultado da quantidade de batata demandada por semana (em kg) num supermercado, em função do seu preço unitário x (por kg) e do preço unitário de arroz y (por kg), $\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40)$. O modelo matemático é $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e (x, y) .
nº 3	I~	I	?	?	Interpretar a expressão da taxa de variação da vazão de sangue com a pressão no capilar, supondo que a pressão na artéria e o diâmetro do capilar permanecem constantes. Descrevendo se a taxa é crescente ou decrescente. O modelo matemático $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y - z} \text{ cm}^3/\text{s}$.
nº 4	I	I	?	?	Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial L^2$ e $\partial^2 Q / \partial K^2$. E explicar o que significa em termos econômicos. O modelo matemático é.

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

2.4.3 Formulário de Análise

De forma a analisar os dados coletados, foi elaborado um instrumento específico na coleta das avaliações realizadas pelos estudantes, nas quais foi primordial conter as características das ações e as operações da ASP. Destacando-se neste momento um indicador essencial, em que em cada problema apresentou destaque em uma determinada operação pré-estabelecida como essencial, a qual pode variar de acordo com o problema e expressa também em escala no quantitativo.

Assim, por meio desses parâmetros, foram analisados o desempenho dos estudantes na resolução de cada problema. A organização do (Quadro 14), descreve os elementos das subcategorias das ações, a qual as análises foram evidenciadas por meio das características das ações realizadas.

Quadro 14 – Instrumento de Análise da Solução dos Problemas

Categoria: Compreender o problema		<i>Quali</i>	<i>Quanti</i>
		<i>Indicador Essencial</i>	<i>Valor alcançado</i>
Subcategorias	Caraterísticas		
a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido		c)	1-5
b) O aluno determina as condições do problema			
c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.			
Categoria: Construir o Modelo Matemático		<i>Indicador Essencial</i>	<i>Valor alcançado</i>
Subcategorias	Características		
a) Determinar as variáveis e incógnitas.		d)	1-5
b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.			
c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.			
d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático			
Categoria: Solucionar o Modelo Matemático		<i>Indicador Essencial</i>	<i>Valor alcançado</i>
Subcategorias	Caraterísticas		
a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		b)	1-5
b) Solucionar o modelo matemático.			
Categoria: Interpretar a Solução		<i>Indicador Essencial</i>	<i>Valor alcançado</i>
Subcategorias	Caraterísticas		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.		b)	1-5
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

2.4.4 Observação

A observação direta, foi utilizada por meio de um guia de observação, nas aulas de vídeo conferência que foram ministradas pelo professor da disciplina no Polo da Universidade Aberta do Brasil/UNIVIRR no município de Boa Vista. A ferramenta fórum tira-dúvidas e chat disponibilizados na sala virtual da disciplina de Cálculo III do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) foram pouco utilizadas pelos estudantes, um dos pontos que pode ter levado a insuficiência de comunicação por meio dessas ferramentas foi a interrupção frequente de energia no Polo de Alto Alegre.

E por fim, nas visitas em campo (aulas de tira – duvidas realizadas no polo pelo tutor a distância), foram acompanhadas pela pesquisadora, a qual descreveu o comportamento dos alunos em relação ao conteúdo e problemas matemáticos que foram explicados, como também a descrição de tudo o que foi importante para responder a questões da pesquisa e gerou conhecimento quanto a teoria aplicada, em todos esses momentos nos quais foram coletados dados relevantes para a análise da pesquisa e sua finalização.

Quadro 15 - Guia de Observação

Data:	Lugar:	
Observador:	Horário de início:	Horário de término:
Vídeo conferência da semana:		
Aula Presencial no Polo de Alto Alegre:		
Semana do Plano de Ensino:		
Assunto:		
Episódio: Desde o início da aula até o seu término.		
Participantes: estudantes, professor da disciplina, pesquisadora e tutores.		
1. Como o professor ou tutor a distância expõe a aula para os alunos?		
2. Os alunos participam ativamente da aula?		
3. Fazem perguntas para o professor?		
4. Em qual fase das etapas mentais se encontra esta aula?		
5. Os alunos demonstram que estão compreendendo o assunto?		
6. Observações Gerais:		

Fonte: Adaptação de Sampieri, 2006.

2.5 VALIDADE DA PESQUISA

A validade de um modo geral é entendida quanto “ao grau que um instrumento que realmente valida a variável que pretende medir” (SAMPIERI, 2006).

A pesquisa qualitativa apresentou evidências satisfatórias ao serem investigadas proporcionaram detalhes específicos sobre a perspectiva de Galperin e o modelo ASPD em derivadas parciais. Por meio dos instrumentos, permitiu-se detalhar os critérios de seleção dos participantes e a ferramenta para coletar dados, descrevendo os papéis desempenhados pelos investigadores de campo e os métodos de análises empregados (procedimentos de codificação, desenvolvimento de categorias e hipóteses), bem como ao especificar o contexto da coleta e como se incorporou nas análises (por exemplo, entrevistas, quando, onde e como se efetuaram). Ao documentar o que foi feito para minimizar as influências de suas concepções e obliquidade, utilizou-se de uma prova diagnóstica, formativa e a final das quais se obtiveram os resultados para análise (SAMPIERI, 2006).

De maneira a assegurar a qualidade da coleta de dados foi utilizado um caderno de anotações das aulas, foram verificados também os critérios evidenciados no parágrafo anterior.

A credibilidade foi obtida de forma transparente na interpretação dos dados, não deixando que fatores como crenças e opiniões influenciassem na pesquisa, todos os dados foram considerados por igual, assim como as evidências positivas e negativas por igual, a participação dos estudantes e professores por igual se evitou também, influenciar os estudantes e professores a sua vida, de modo que o processo ocorresse naturalmente.

A transferência (validade externa qualitativa ou aplicabilidade de resultados) se referia a que o usuário da investigação determinasse o grau de semelhança entre o contexto de estudo e outros contextos. À medida que a investigação avançava, os resultados eram obtidos o qual eram analisados nos contextos para mostrar evidências de que o estudo realizado pode ser utilizado em outros cenários semelhantes.

A investigação qualitativa implicou no rastreamento dos dados em sua fonte e na explicação da lógica utilizada para interpretá-los. Os seguintes elementos se destacam na confirmação da pesquisa: permanência prolongada no campo, a triangulação, a auditoria, a verificação com os participantes e a lista de prejuízos, crenças e concepções do investigador. Por meio dos elementos apresentados foi realizada uma análise que confirma a veracidade da investigação (SAMPIERI, 2006).

Os instrumentos de coleta de dados quantitativos devem apresentar três requisitos: confiabilidade, validez (conteúdo, critério e constructo) e objetividade.

Nas variáveis quantitativas a execução do sistema de ações “X” e a causa e relação da aprendizagem “Y” para medir a confiabilidade se utilizou o método das metades partidas, em que uma única medida se aplicou em um estudante, o conjunto de itens que mede uma variável foi dividido em duas metades equivalentes e se comparou a pontuação de ambas. Desse modo, o instrumento sendo confiável, as pontuações encontram-se correlacionadas, por exemplo, quando um aluno tem em uma metade uma pontuação alta, também deve ter na outra metade. Para medir esta correlação foram aplicadas as provas diagnóstica, formativa e final.

A validade foi analisada, em suas evidências de conteúdo, critério e constructo. A evidência do conteúdo nas variáveis “X” e “Y” foi refletida por meio da criação dos indicadores da ASP em matemática e a partir dos anteriores se construiu a ASP em derivadas parciais, desse modo os instrumentos mediram as dimensões das variáveis. Na variável X o instrumento mediu as quatro ações com suas respectivas operações e a variável Y mediu a resolução de problema fundamentada nas cinco etapas de formação das ações mentais.

A evidência do critério foi estabelecida na variável “X” com a utilização de dois instrumentos. No primeiro se estabeleceu com a aplicação das provas escritas e o segundo com a observação das aulas. Na variável “Y” foi aplicado um instrumento pelo método da observação o qual foi confrontado com elementos do instrumento qualitativo.

Na análise do constructo foi estabelecida a relação teórica entre os conceitos que refletiram nos instrumentos, de forma que mostra no resultado se a aplicação do sistema de ações “X” produziu o desempenho dos estudantes na ASP em derivadas parciais “Y”, com a utilização da teoria de formação por etapas das ações mentais e a direção do processo de estudo. Assim, quando o instrumento mede “X”, os resultados se relacionam positivamente com os obtidos nas medições.

A objetividade foi alcançada mediante a padronização da aplicação do instrumento e na avaliação dos resultados, ou seja, é a aplicação dos mesmos instrumentos e condições para os estudantes e professores.

O rigor da pesquisa, ocorreu por meio dos procedimentos apropriados que responderam à formulação do problema e sua realização de maneira efetiva. Bem como no resultado e no processo que evoluiu em cada etapa da investigação e por fim na possibilidade de estender o estudo feito a outros grupos.

Sampieri apresenta que “o conceito de triangulação se estendeu, mas além da comparação dos métodos e dados quantitativos e qualitativos, classificando assim a triangulação de: i) dados; ii) métodos, iii) investigadores, iv) teorias e v) ciências e/o disciplinas” (2006, p 790).

A triangulação dos dados por meio dos métodos, da teoria e dos resultados foi importante para que o resultado do trabalho tivesse maior exatidão. Desse modo, a análise no enfoque qualitativo foi realizada no intuito de poder conhecer como os estudantes estavam assimilando os conceitos essenciais de derivadas na utilização da ASP para resolver problemas, e assim verificar se foi produzida a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

Na fusão dos enfoques se utilizou a triangulação dos dados de distinta natureza no qualitativo por meio das categorias da ASP que teve como indicador essencial a ação (interpretar a solução) e no quantitativo essas categorias foram convertidas em variáveis que tiveram seus indicadores essenciais evidenciados em cada problema.

Os dados foram obtidos de diferentes fontes como a observação direta (visita em campo, fórum, chat, vídeo conferência e diário de pesquisa). Em distintos tempos por meio dos dados coletados na prova diagnóstica, de series de tempos (prova formativa 1 e prova final) e experimentos cronológicos (delineamento do tipo 2).

Na triangulação do método se utilizou o desenho do enfoque principal o predominante, sendo esta uma investigação qualitativa e quantitativa com o enfoque principal qualitativo.

A integração dos dados dentro de cada método ocorreu por meio de um formulário de análise (Apêndice F, G e H) primeiramente no qualitativo e após, no quantitativo, de acordo com a escala das categorias. Por fim foi realizada a comparação da junção de forma explicativa dos dois métodos fazendo uso da sondagem e das técnicas qualitativas.

Na triangulação de investigadores se utilizou o método de auditoria que foi utilizado por mais de um investigador, as análises do caderno de anotações, as provas, os resultados da entrevista, etc.

No decorrer do capítulo, foi possível perceber que os dados foram coletados por meio de instrumentos de observação e prova de lápis e papel que posteriormente foram analisados na forma qualitativa, quantitativa e mista que levou a evidenciar a aprendizagem produzida em derivadas parciais por meio da utilização das categorias da ASP.

CAPÍTULO 3 RESULTADOS E ANÁLISES

A pesquisa foi organizada de acordo com a ASP da Didática, a qual foi desenvolvida em três momentos, com o objetivo de realizar a investigação de maneira relevante, estudando por meio da ASP e das ações mentais o desempenho dos estudantes na aprendizagem do conteúdo de derivadas parciais.

3.1 MOMENTOS DA ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA DA DIDÁTICA EM DERIVADAS PARCIAIS

Os momentos ora descritos foram de suma importância para a execução da referida pesquisa uma vez que possibilitaram obtenção de informações necessárias na realização do estudo e no estabelecimento dos instrumentos de análise.

3.1.1 Momento 1: Identificar a ASP em Derivadas Parciais

1ª Ação: Compreender a situação problema:

Primeiramente será destacado como surgiu, o Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB), este foi criado pelo Ministério da Educação no ano de 2005, em parceria com a ANDIFES e Empresas Estatais, no âmbito do Fórum das Estatais pela Educação com foco nas Políticas e a Gestão da Educação Superior. Trata-se de uma política pública de articulação entre a Secretaria de Educação a Distância - SEED/MEC e a Diretoria de Educação a Distância - DED/CAPEES com vistas à expansão da educação superior, no âmbito do Plano de Desenvolvimento da Educação - PDE.

Desse modo, o ensino a distância busca atender às regiões e localidades de difícil acesso. O curso de Licenciatura Plena em Matemática a distância na UFRR foi estruturado de forma a atender o previsto pelas Resoluções CNE 01/2002 e 02/2002 no tocante aos processos de formação de professores, cargas horárias e conteúdos básicos concebidos nessa formação (PPP, 2013).

Sua matriz curricular está estruturada de modo a fornecer ao futuro professor de matemática competências, habilidades e conhecimentos nas áreas de Análise, Geometria, Álgebra e Educação Matemática. Apresentando como objetivo principal formar docentes para atuarem na rede pública dos municípios do Estado de Roraima, elevando assim a qualidade do

ensino-aprendizagem da Matemática. Dos municípios existentes no Estado, fez parte da pesquisa em questão: Alto Alegre, o qual se encontravam os alunos do 5º semestre do curso que cursaram a disciplina de cálculo III com carga horária de 75 h (PPP, 2013).

Conforme o PPP, a organização curricular do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância atende às Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica. Tem como objetivo principal de sua matriz curricular a formação matemática atrelada a uma formação pedagógica sólida (2013).

A metodologia utilizada na educação a distância caracteriza-se por mediar uma relação em que professor e alunos estão fisicamente separados. A interação dos estudantes com os docentes e entre si, apesar do distanciamento geográfico, é garantida por diferentes meios tecnológicos, resultando em maior eficiência para o processo de aprendizagem. Buscando a formação integral dos estudantes, para que se transformem em produtores de conhecimento e não em meros receptores de informações, faz-se necessária a comunicação multidirecional, mediada por tecnologias apropriadas. (PPP, 2013).

A organização didática do curso de matemática apresenta a seguinte estrutura para o processo de ensino-aprendizagem:

Ambiente virtual de aprendizagem (AVA): Para o aluno que estuda a distância, o ambiente virtual de aprendizagem do curso é o principal meio de interação. Não se trata apenas de um lugar onde o estudante acessa as suas aulas, acima de tudo, é nesse espaço que ele encontra motivação para aprofundar seus estudos. O objetivo do ambiente virtual é proporcionar a dinamização, colaboração, interação e contextualização das disciplinas ao processo de aprendizagem. É utilizado o sistema MOODLE da UFRR, o qual possui salas de chats, fórum, sistemas de acompanhamento entre outras ferramentas. O acesso ao MOODLE é exclusivo para os alunos matriculados e seus respectivos professores. Eles têm o acesso ao sistema, em tempo integral, via internet com senhas pessoais. No AVA on-line, os cursistas podem se comunicar, sincrônica e assincronicamente, com os seus professores ou colegas, comentar as aulas, discutir temas relacionados às disciplinas em andamento em fóruns, enviar sua produção ao professor, compartilhar trabalhos desenvolvidos com os demais colegas, acessar ementas e programas de disciplina, bibliografias de referência, artigos on-line e outras informações relevantes ao bom desempenho no curso.

Atividades presenciais: O curso tem 30% da carga horária desenvolvida em atividades presenciais a serem distribuídas entre o início, meio e/ou final do curso de acordo com as

necessidades didáticas específicas de cada disciplina, incluídas as avaliações escritas presenciais.

Acesso à biblioteca central e incentivo ao uso de bibliotecas virtuais: O material didático de base orienta no sentido do aprofundamento em fontes diversas de informação que complementem os textos-base apresentados, incentivando o desenvolvimento de uma cultura de auto-formação por parte dos cursistas.

Vídeo-aula: São desenvolvidas vídeo-aula gravadas e digitalizadas e disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem, permitindo a combinação de imagens estáticas e dinâmicas, imagens reais-atuais, de arquivo e de simulação; bem como a combinação de um universo de imagens e som potencializadores para o aprofundamento dos temas.

Laboratório de Educação Matemática (LEM): O Departamento de Matemática vem buscando reestruturar e ampliar o Laboratório de Educação Matemática visando atender aos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima nas modalidades presencial e a distância. (PPP, 2013).

As avaliações nesta modalidade seguem a normatização prevista na legislação educacional brasileira e regulamentada por Resolução interna própria da UFRR. A legislação, através do Decreto 5.622, de 19/12/2005, ainda em vigência, estabelece a obrigatoriedade de momentos presenciais não só para avaliação dos estudantes, mas também para estágios, TCC e atividades laboratoriais. Os exames presenciais devem prevalecer sobre os demais resultados da avaliação no processo. Referente à pesquisa foram realizadas avaliações presenciais de forma a garantir a evidência dos instrumentos de coleta de dados. (PPP, 2013).

As aulas presenciais ocorrem em espaços físicos distribuídos entre as instalações da UFRR (laboratórios de informática e salas de aula) e a Universidade Virtual de Roraima (UNIVIRR) (laboratórios de informática e salas de aula). Dessa forma, o curso conta com laboratórios de informática da UNIVIRR que possuem em média 40 computadores por polo e são instalados em escolas municipais e estaduais, ou em espaço físico próprio oferecido pelo município. Nestas localidades existem ainda salas de aulas presenciais e salas de vídeo conferência. (PPP, 2013).

Neste momento de identificação da ASP em derivadas parciais, primeiramente a pesquisadora se reuniu com o professor de matemática da Universidade Federal de Roraima, responsável pela disciplina de Cálculo III na modalidade a distância, para saber como seria desenvolvida disciplina no semestre 2014.1.

Por conseguinte, a pesquisadora foi em busca de informações e identificou algumas situações, ou seja, problemas que o professor poderá enfrentar na modalidade a distância, como a falha na conexão da internet, a pouca disponibilidade de livros de cálculo nos polos do interior, como também equipamentos visuais e de áudio com defeito, apagões frequentes de energia, porém o professor deve se empenhar para desenvolver sua aula mesmo em meio a essas diversas situações. Se fez necessário também conhecer o projeto político pedagógico do curso de licenciatura em matemática na educação a distância e a ementa da disciplina de cálculo III, as disciplinas pré-requisito e bibliografias, buscou-se informações sobre os estudantes, se identificou os recursos didáticos, livros textos disponíveis na biblioteca, foi determinado os objetivos de ensino do conteúdo, estabeleceu-se os conhecimentos prévios que os estudantes deveriam possuir para o estudo dos conteúdos da disciplina, em especial para o assunto de derivadas parciais. Ressalta-se que esse levantamento se fez necessário porque o objetivo do problema didático se encontra sempre relacionado à aprendizagem.

2ª Ação: Identificar a atividade cognitiva:

Na identificação da atividade cognitiva se buscou a assimilação dos estudantes quanto ao conceito de derivadas de funções com duas variáveis, sendo que este conteúdo no momento inicial da disciplina era novo para os estudantes. Foi utilizada a resolução de problema como metodologia de ensino, se fez necessário analisar que conhecimentos prévios os estudantes deveriam dominar, para então, após se elaborar Atividade de Situação Problema em Derivadas Parciais.

Esse contexto, exigiu do professor o domínio dos conteúdos matemáticos, o qual soube organizar o sistema de ações nos assuntos que trabalhou e escolheu o método adequado, pois o domínio do conteúdo e o método adequado foram elementos indispensáveis que levaram a alcançar os objetivos de ensino da disciplina. O assunto da disciplina foi disponibilizado aos estudantes na sala da disciplina de Cálculo III do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), de maneira explicativa em forma de slide, que continham como exemplo problemas destacando as quatro ações da ASP.

3ª Ação: Determinar o nível de partida da atividade cognitiva dos alunos.

O professor possuía informações suficientes quanto aos requisitos intelectuais mínimos dos estudantes para que os objetivos de ensino fossem alcançados, os requisitos não eram apenas os conhecimentos prévios que os estudantes possuíam, mas também a execução das ações e métodos. Pois o professor já havia ministrado uma disciplina no semestre anterior para estes estudantes, o que facilitou o estabelecimento das informações necessárias quanto ao conhecimento dos alunos.

Pretendia-se desenvolver a formação de habilidades dos estudantes na resolução de problema tendo como modelo matemático o cálculo de derivadas parciais, nesse propósito se fez necessária a formação de conceitos e habilidades no cálculo de derivadas parciais e suas aplicações.

Os conhecimentos prévios principais são: conceito de derivadas de funções com uma variável e suas aplicações, estratégias ou métodos para resolução de problemas matemáticos e ações lógicas para a inclusão de conceitos. Este sistema de ações se chamará Atividade de Situações Problema (ASP) em Derivadas.

Foi aplicada uma avaliação diagnóstica por meio de provas de lápis e papel aos estudantes da disciplina de Cálculo III no Polo da Universidade Virtual de Roraima (UNIVIRR) no município de Alto Alegre/RR, na aula denominada na Educação a Distância de aula presencial, no intuito de obter informações quanto ao domínio das habilidades na formação do conceito de derivadas de funções com uma variável, foram realizadas também a observação direta nas aulas de videoconferência ministrada no Polo da UNIVIRR em Boa Vista/RR. Fez-se necessário verificar as habilidades na resolução de problemas no tema de derivadas de funções com uma variável, bem como buscar informações sobre as ações da ASP em Derivadas de Funções com uma Variável, como: compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

Na elaboração das avaliações diagnósticas, foi de suma importância incluir componentes que permitiram determinar a etapa mental em que se encontrava as ações relacionadas às habilidades da ASP em Derivadas de Funções com uma Variável, sendo necessário que as nas perguntas tivessem a frase “justifique sua resposta”. Na aplicação das provas de lápis e papel e das primeiras aulas, foi averiguado a atitude e motivação dos estudantes.

O professor buscou manter a atitude e motivação dos estudantes durante todo o processo de ensino-aprendizagem com a sua habilidade didática na explicação dos assuntos e exemplos além dos slides elaborados com os assuntos da disciplina, disponibilizados no AVA. A interação dos estudantes com os professores e com os outros estudantes da turma, ocorrem por meio de tecnologias adequadas a educação a distância. Em resumo esta fase representou o momento anterior ao planejamento de ensino, a qual se considerou principalmente os objetivos de ensino, o nível inicial dos estudantes e as condições gerais do curso.

3.1.2 Momento 2: Planejar a ASP em Matemática

4ª Ação: Formular o sistema invariante das ações:

No segundo momento, o professor decidiu como conduziria os estudantes da zona de desenvolvimento real à potencial, sendo que neste instante foi construído a zona de desenvolvimento proximal. Teve como desafio desenhar o sistema de ações invariantes que se apresentou como uma ação complexa que esteve conexa ao objetivo de ensino no intuito de ampliar a eficiência no processo de aprendizagem.

Procedendo da avaliação diagnóstica na Atividade de Resolução Problema em Derivadas de funções com uma variável, se planejou a ASP em Derivadas Parciais. Ressalta-se que, se fez necessário organizar atividades via sala virtual e aulas presenciais, de maneira a criar um elo em vários momentos da ASP em Derivadas Parciais, devido ao fato dos estudantes não possuírem conhecimentos prévios suficientes. Desse modo, a atividade em questão esteve formada pelo sistema de ações: compreender o problema, construir o modelo matemático (derivada de funções com duas variáveis), solucionar o modelo matemático (solucionar a derivada de funções com duas variáveis) e interpretar a solução.

O processo de ensino-aprendizagem se iniciou com situações problema, em que as operações se encontravam no enunciado do problema, uma vez que o assunto em questão era complexo. Porém, quando os estudantes não possuem habilidades para resolução de problemas, pode-se iniciar com problemas em que a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado, que permitirá ao estudante se dedicar um tempo, pensando e arquitetando um plano a ser utilizado que o levará a solução. Foram escolhidos problemas que estejam condicionados à solução do modelo matemático, por estar relacionado com as propriedades essenciais do conceito de derivadas parciais e seu cálculo, tendo como propriedade essencial do conceito, que uma função f de duas variáveis, x e y , é derivável em relação a x , permanecendo a variável y constante, denotada por, $f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, se o limite existir. Do mesmo modo, a derivada parcial de f em relação a y , permanecendo a variável x constante, denotada por, $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, se o limite existir.

A partir desta ideia inicial na forma material, se realizou um trabalho por etapas de formação de ações para a construção do conceito nas aplicações de derivadas parciais (forma verbal e interna). Por conseguinte, foi planejado o sistema invariante de ações levando em consideração os conhecimentos prévios.

5ª Ação: Formular a base orientadora da ação:

De modo a obter uma assimilação e retenção ascendente, foi utilizado inicialmente a base orientadora da ação geral, completa e preparada formada pelo sistema de ações da ASP em Derivadas Parciais. Todas as orientações foram dadas na forma (completa) para que os estudantes construíssem a partir do conteúdo disponibilizado pelo professor no ambiente AVA, videoconferências e aulas presenciais de forma (preparada). A direção de estudo foi utilizada juntamente com a ASP em Derivadas Parciais de forma cíclica, para garantir a relação da orientação, execução e controle do sistema de ações com o objetivo de ensino.

6ª Ação: O sistema de avaliação.

Selecionou-se o sistema de avaliação levando em consideração a etapa mental que se encontrava o estudante. Realizou-se a avaliação diagnóstica na Atividade de Resolução Problema em Derivadas de Funções com uma variável, visando identificar os conhecimentos prévios dos alunos, foi evidenciado a não existência dos conhecimentos prévios, sendo preciso fazer a ligação entre os assuntos necessários por meio de atividades em diferentes momentos da ASP em Derivadas Parciais. Foram realizadas discussões sobre o assunto em aulas presenciais no Polo da Universidade Virtual de Roraima no município de Alto Alegre, atividades disponibilizadas na sala da disciplina no ambiente AVA, duas provas de lápis e papel formativa e uma final aplicada em aula presencial, que se encontram entre os tipos de avaliação (informal, semiformal e formal). Na avaliação final, buscou-se verificar o cumprimento do objetivo de ensino. A avaliação serviu como controle durante todo o processo de ensino-aprendizagem, permitindo assim, fazer adaptações quando necessário.

3.1.3 Momento 3: Construir a ASP em Matemática

7ª Ação: Preparar o plano de ensino considerando as etapas mentais:

Este momento permitiu a elaboração do plano de ensino centrado na resolução de problema, embasado no sistema de ações da ASP e das etapas mentais no assunto de Derivadas Parciais e nas características dos conteúdos matemáticos. O planejamento (Tabela 6) foi criado levando em consideração os seguintes elementos: conteúdos, objetivos, tipo de aula (TA), quantidade de hora (H/A) e caracterização da etapa mental. No ensino a distância o Plano de Ensino é disponibilizado ao estudante na sala de aula do AVA, logo no início do semestre, fica disponível para download durante todo o período da disciplina.

Tabela 6 - Plano de Ensino

PLANO DE ENSINO					
nº	Conteúdo	Objetivos	TA	H/A	Etapa Mental
1	Taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece fixa. Interpretação geométrica de derivadas parciais de uma função de duas variáveis.	Compreender o conceito de derivada parcial em relação a x , é dada por $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, e a derivada parcial em relação a y , é dada por $f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$. Saber interpretar na forma geométrica uma função de duas variáveis.	AT	2	Orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções de duas variáveis (Etapa de formação da BOA) A ação compreender o problema, solucionar o modelo e interpretar a solução estão vinculadas com o objetivo do problema.
2	Derivadas Parciais	Resolver problemas a partir do limite quociente diferença e interpreta-los geometricamente.	AP	4	O estudante deve praticar (etapa mental) minuciosamente o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário. As ações são consciente, compartilhadas, detalhada e não generalizada.
3	Análise Marginal	Saber aplicar a regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema.	AT	2	O estudante deve praticar (etapa mental) minuciosamente o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário. As ações são consciente, compartilhadas, detalhada e não generalizada.
4	Análise Marginal	Saber utilizar a regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema.	AP	2	O estudante deve explicar (etapa verbal) o sistema de ações sem ajuda de objetos externos. As ações são consciente, compartilhadas, detalhadas e as operações são automatizadas.
5	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Saber aplicar a definição da Regra Cadeia $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ para funções de duas variáveis na resolução de problema.	T	2	Orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções de duas variáveis. A ação compreender o problema, solucionar o modelo e interpretar a solução estão vinculadas com o objetivo do problema.
6	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Saber empregar a regra da cadeia e aplicações na resolução de problema.	AP	4	O estudante deve saber utilizar o sistema da ASP em derivadas parciais e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas.

7		Saber perceber o conceito de diferenciabilidade de uma função de duas variáveis $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ Através da atividade de situações problema.	AT	2	Orientação do sistema de ações da ASP em diferenciabilidade a partir de problemas de funções de duas variáveis. A ação compreender o problema, solucionar o modelo estão vinculadas com o objetivo do problema.
8		Saber resolver problemas de diferenciabilidade e suas aplicações.	AP	4	O estudante deve saber utilizar o sistema da ASP em diferencial e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas.
Legenda: AT: Aula teórica, AP: Aula Prática.					

8ª Ação: Fazer os planos de aulas:

Elaboraram-se os planos de aula mantendo a conexão com os princípios teóricos da formação das etapas mentais, a direção em sua forma cíclica e a Atividade de Situações Problemas em Matemática. Na disciplina de Cálculo III modalidade a distância, os planos de aula eram colocados na sala virtual pelo professor em cada quinzena que se iniciava, o qual os estudantes tinham acesso ao conteúdo elaborado em forma de slide, além dos livros-textos e livros complementares de cálculo. Os feedbacks (retroalimentação) das dúvidas apresentadas pelos estudantes respondidos por meio de mensagem individual, chat e principalmente no fórum-tira-dúvidas relacionado ao assunto de cada quinzena, os feedbacks são descritos pelos tutores a distância e também pelo professor da disciplina.

Por meio da Atividade de Situação Problema de Mendoza e das Etapas das ações mentais de Galperin, mais precisamente, se elaborou a Base orientadora da ação no conteúdo de derivadas parciais. O primeiro passo foi iniciado com uma revisão sobre derivada de função com uma variável, em seguida, se explicou o conteúdo de derivadas parciais e seu conceito, ambas através de situação problema.

O planejamento realizado teve como objetivo que os estudantes fossem capazes de desenvolver o cálculo da taxa de variação na produtividade da mão de obra e do capital utilizando a derivação parcial, compreender o cálculo de funções com duas variáveis e diferenciar a derivação parcial em relação a variável x e y .

O desenvolvimento do método de ensino propôs a utilização da base orientadora da ação de forma preparada, por meio do sistema de ações da ASP em derivadas parciais, as orientações forma apresentadas no modo completo para que os estudantes compreendessem todo o processo de derivação parcial. O conteúdo foi desenvolvido por meio de aulas teóricas e práticas, a

Resolução de Problema foi utilizada como estratégia de ensino, a direção da ASP em derivadas parciais a ser utilizada foi do tipo cíclica, em que se estabeleceu a relação da orientação, execução e controle do sistema de ações de modo a garantir o objetivo do ensino.

Para isto, o processo de ensino-aprendizagem iniciou com o seguinte problema: Um empresário calcula que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o lucro é dado por $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades?

A partir deste problema e em razão da importância de saber quais os conhecimentos prévios que os alunos possuíam em relação ao assunto, foram feitas as seguintes perguntas aos estudantes: Quais são os dados do problema?; O que significa $f(x)$ no problema dado?; Quando vai existir a derivada de uma função?; Como sabemos que a derivada de um determinado ponto existe? Qual o significado do resultado final desta função?.

Realizou-se a execução da resolução do referido problema do assunto de derivada de função de uma variável, sendo todo este processo necessário para posteriormente iniciar o conteúdo de derivadas parciais. Assim apresenta-se a solução do problema.

Solução:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -400x^2 + 6.800x - 12.000 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400(x+h)^2 + 6.800(x+h) - 12.000 - (-400x^2 + 6.800x - 12.000)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400(x^2 + 2xh + h^2) + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400x^2 - 800xh + 400h^2 + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-800xh - 400h^2 + 6.800h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400h - 800x + 6.800}{h} \\
 &= -800x + 6.800
 \end{aligned}$$

Desse modo, pode-se perceber que o cálculo foi resolvido utilizando a derivada de uma função, que apresenta a seguinte definição: A derivada da função $f(x)$, em relação a x é a função $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e o processo de calcular a derivada é chamado de derivação. Dizemos que uma função $f(x)$ é derivável no ponto c se $f'(c)$ existe, ou seja, se o limite do quociente diferença que define $f'(x)$ existe no ponto $x = c$.

Prosseguindo, calcula-se o nível de produção x quando estão sendo produzidas 9000 unidades:

$$x = 9 \text{ (9.000 unidades)}$$

$$f'(9) = -800(9) + 6.800 = -400$$

Apresenta-se o conceito de derivada num ponto: se uma função possui uma derivada em x_1 , a função será derivável em x_1 . Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

Com a realização da revisão, adentrou-se no conteúdo de derivadas parciais com o seguinte Problema: Estima-se que a produção semanal de uma fábrica é dada pela função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, onde x é o número de operários especializados e y o número de operários não especializados utilizados no trabalho. No momento, a mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados e 60 operários não especializados. Use a análise marginal para estimar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

O desenvolvimento da resolução do problema para ensinar os estudantes o assunto de derivadas, ocorreu por meio das ações e operações da Atividade de Situações Problema, conforme descrito a seguir:

I. Compreender o problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados e elementos desconhecidos.

Análise Marginal: em economia se refere ao uso de uma derivada para estimar a variação do valor de uma função em consequência de uma mudança no valor de uma das variáveis.

Taxa de Variação: calcular a função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, o que corresponde a derivar a função em relação a uma das variáveis mantendo fixa a outra variável. Este processo é conhecido como derivação parcial; a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função.

Determinar e interpretar os dados do problema.

- A fábrica possui operários especializados e não especializados para produção semanal em unidades.
- A mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados.

- 60 operários não especializados.

O objetivo do problema é determinar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

II. Construção do modelo matemático.

Determinar as variáveis

- A variável “ x ” representa o número de operários especializados e a variável “ y ” o número de operários não especializados utilizados no trabalho.

- $x \in R$.

- $y \in R$.

Construção da função que envolve duas variáveis

Como $f(x$ o número de operários especializados, y o número de operários não especializados) = $1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, então a função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ representa as unidades produzidas por semana.

Foi esclarecido aos estudantes que em vários problemas nos quais envolvem funções de duas variáveis, temos como objetivo calcular a taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, isso significa derivar a função obtida ao manter-se uma variável fixa. Este procedimento chama-se derivação parcial, sendo que a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função.

Seguindo com o problema, se o número de operários não especializados permanecer constante, a taxa de variação da produção em relação ao número de operários especializados pode ser obtida derivando $f(x, y)$ apenas em relação à x . Isto é, consideramos a função g de uma variável obtida fixando-se a variável $y = k$ na função f , ou seja, $g(x) = f(x, k)$.

A taxa de variação da produção em função do número de operários é dada, portanto, pela derivada da função de uma variável g . Definimos a derivada de g como sendo a derivada parcial de f em relação à x e a representamos pelo símbolo $f_x(x, y)$.

Em símbolos matemáticos, $f_x(x, k) = g'(x)$.

Da mesma forma, mantendo-se o número de operários especializados fixo, então a taxa de variação do número de operários não especializados é dado pela derivada parcial de Q em relação à y . Isto é, mantendo-se x constante, tal variação é obtida derivando-se $f(x, y)$ em relação à y . Essa derivada é representada pelo símbolo $f_y(x, y)$.

III. Solução do modelo matemático

Dada à função: $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, queremos calcular o aumento da produção semanal se aumentarmos o número de operários especializados e mantivermos o número de operários não especializados fixo. Para tal objetivo, devemos derivar parcialmente a função $f(x, y)$ em relação à x , permanecendo y constante.

A partir da função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, obtemos a derivada parcial $f_x(x, y)$ seguindo os seguintes passos:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200(x+h) + 500y + (x+h)^2y - (x+h)^3 - y^2 - (1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + (x^2 + 2xh + h^2)y - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + x^2y + 2xhy + h^2y - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200h + 2xhy + h^2y - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1200 + \lim_{h \rightarrow 0} 2xy + \lim_{h \rightarrow 0} hy - \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 3xh - \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \\ &= 1200 + 2xy + 0 - 3x^2 - 0 - 0 \\ &= 1200 + 2xy - 3x^2 \end{aligned}$$

Desse modo, calculamos a derivada parcial $f_x(x, y)$ que é assim denotada:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Visando fixar a noção de derivada parcial, calculamos também $f_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 500(y+h) + x^2(y+h) - x^3 - (y+h)^2 - (1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 500y + 500h + x^2y + x^2h - x^3 - y^2 - 2yh - h^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{500h + x^2h - 2yh - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 500 + \lim_{h \rightarrow 0} x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 2y - \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= 500 + x^2 - 2y \end{aligned}$$

Dessa forma, calculamos a derivada parcial $f_y(x, y)$ que é dada por

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

IV. Interpretação da solução

Seguindo com o problema dado, essa derivada parcial $f_x(x, y) = 1.200 + 2xy - 3x^2$ é a taxa de variação da produção em relação ao número de operários especializados, mantendo o número de operários não especializados constante. Para quaisquer valores de x e y , esta é uma aproximação do número de unidades a mais que serão produzidas por semana se o número de operários especializados aumentar de x para $x+k$, onde k é um número natural, e o número y

de operários não especializados permanecer constante. Em particular, se o número de operários especializados aumentar de 30 para 31 e o número de operários não especializados permanecer constante em 60, a variação da produção será aproximadamente

$$f_x(30, 60) = 1.200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2.100 \text{ unidades.}$$

Com o objetivo de chegarmos ao resultado da variação exata, substituímos os valores dados na função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$.

$$f(31,60) = 1.200(31) + 500(60) + (31)^2(60) - (31)^3 - (60)^2$$

$$f(31,60) = 91469$$

e

$$f(30,60) = 1.200(30) + 500(60) + (30)^2(60) - (30)^3 - (60)^2$$

$$f(30,60) = 89400$$

Então, a variação exata é

$$\Delta f = f(31,60) - f(30,60) = 91469 - 89400 = 2069.$$

Comparando a variação exata com a variação estimada pela derivada parcial, concluímos que obtivemos uma aproximação com erro muito pequeno.

Como forma de realizar o processo de retroalimentação, esclarecendo as possíveis dúvidas que ainda existiam após a explicação realizada pelo professor, foi elaborada e executada a conclusão do planejamento da seguinte forma:

Conclusões do Plano de Aula

Na finalização da aula se fez necessário realizar uma análise para constatar se os estudantes assimilaram o conteúdo (através de perguntas ou elaboração de um questionário), observando se resolveram corretamente as situações problemas que foram propostas. Após, se auxiliou os estudantes corrigindo com eles os erros encontrados como também tiraram-se as possíveis dúvidas, as ideias centrais do assunto foram apresentadas em forma de resumo, reforçando assim os objetivos propostos. Logo em seguida, foi feita uma breve abordagem mostrando a importância das derivadas parciais no cotidiano.

Prosseguindo, foi explicado que o conteúdo de derivadas parciais pode ser aplicado em várias áreas de conhecimento. O que pôde ser percebido na explicação dos problemas acima, que são aplicações da derivada na área da produção.

Por conseguinte, no que se refere ao professor, este teve por meta na aula ministrada avaliar o nível de aprendizagem, através de atividades, indagações e aplicação de questionário que foram propostos aos acadêmicos de cálculo III do Curso de Matemática a distância.

A aula foi realizada com o intuito de preparar os acadêmicos para desenvolver questões de cálculo de taxa de variação, a compreender cálculos de funções com duas variáveis e a diferenciar a derivação parcial em relação a variável x e y . Em todas as aulas o professor buscou sanar todas as dúvidas que surgiam, para que os alunos estivessem aptos a resolver problemas do respectivo assunto.

De modo, para que o assunto de derivadas parciais fosse interiorizado pelos estudantes, foi proposto aos mesmos o seguinte problema: Suponha que $10.000x$ da unidade monetária seja o inventário feito numa loja, y seja o número de balconistas na loja, f seja o lucro semanal da loja e $f = 3.000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$ onde $15 \leq x \leq 25$ e $5 \leq y \leq 12$. No momento, o inventário é de \$ 180.000,00 e existem 8 balconistas.

a) Ache a taxa de variação instantânea de f por unidade de variação em x , se y permanecer fixo em 8.

b) Ache a taxa de variação instantânea de f por unidade de variação em y , se x permanecer fixo em 18.

Este problema foi utilizado como alvo de debate em sala. O mesmo engloba o conteúdo dado e, por meio deste e outros problemas propostos, os estudantes foram avaliados no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, o professor expressa aos estudantes que, na próxima aula, seria estudado as derivadas parciais em um problema de economia por intermédio da função Cobb-Douglas. Além disso, foi passada uma lista de exercícios com problemas envolvendo o assunto estudado, para que os estudantes desenvolvessem na prática o conteúdo da aula.

9ª Ação: Preparar os instrumentos do sistema de avaliação.

Nesta ação, assim como na anterior, considerou-se a etapa de formação das ações mentais e os conteúdos matemáticos. Foram preparados os instrumentos do sistema de avaliação que foram as provas de lápis e papel primeiramente, uma diagnóstica, depois uma formativa 1 e por último a avaliação final, os problemas tiveram a forma subjetiva em que se apresentou com frequência o item “Justifique sua resposta”.

A observação direta na sala de aula também foi utilizada para a compreensão do processo de aprendizagem dos estudantes. A observação nas aulas presenciais e no ambiente virtual de aprendizagem possibilitaram a realização de mudanças posteriores nos instrumentos utilizados, quando houve necessidade. A estruturação ocorreu no período de novembro de 2013 até março de 2013, após a intervenção foi executada conforme o planejamento na disciplina de Cálculo III com início no dia 17 de março de 2014.

Contudo, após a coleta de informações por meio dos instrumentos criados para análise, sendo estes provas e guias de observação. Os dados coletados foram analisados, dando origem ao relatório final da pesquisa que evidenciou os resultados alcançados com a aprendizagem.

3.2 RESULTADOS DOS INSTRUMENTOS

Na composição dos instrumentos foram analisados problemas pertencentes aos testes e atividades realizadas, selecionados com o objetivo de evidenciar as ideias conceituais de derivadas parciais, organizadas em três momentos:

- Teste diagnóstico: contendo quatro problemas envolvendo o conteúdo de derivada de funções com uma variável;
- Teste formativo: composto de quatro problemas o qual primeiramente apresentou-se um problema formal de derivadas parciais, prosseguindo com outros contextualizados aplicados à área da medicina e produção.
- Teste final: composto por 10 problemas envolvendo todos assuntos estudados na disciplina, dos quais foram escolhidos quatro problemas do conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações.

3.2.1 Identificação do Nível de Partida para o Estudo de Derivadas Parciais

Por meio da aplicação da prova para identificar o nível de partida, foram obtidas 07 (sete) respostas do problema (P-01), 01 (uma) (P-02), com aproveitamento, (P-03) e (P-04) não houve resposta satisfatória, neste momento da investigação um estudante não compareceu na execução do teste diagnóstico. Analisando os problemas propostos de acordo com a sua complexidade e os conhecimentos do nível de partida, observou-se que o primeiro problema apresentou maior número de respostas em relação aos demais. De maneira correta, parcialmente

correta ou incorreta, as exposições das análises foram decisivas na organização de hipóteses e ideias finais com relação ao desempenho dos estudantes.

De acordo com o solicitado para todos os estudantes, no primeiro problema (P-01), foi analisado as habilidades quanto aos procedimentos necessários para resolver a derivada de uma função. Expressando como ação principal do referido problema a solução do modelo.

Problema 01: Determine a derivada das seguintes funções:

- a) $f(x) = 4,9x^2$
 b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$
 c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$
 d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$
 e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$

Desse modo, as descrições da (Tabela 7 e 8) apresentam o resultado da análise do problema, sumarizado do formulário de análise *quali-quantitativa*, que expressa as respostas dos problemas do teste diagnóstico (P-01e P-02), do Aluno 01, classificado (A-01).

Apresentar-se-á o resultado qualitativo na coluna de análise desempenho Qualitativo dos problemas resolvidos pelo estudante (A-01) e que se relacionam com as categorias das Ações no problema, e por conseguinte o resultado quantitativo na coluna desempenho quantitativo determinado pelo indicador essencial da ação.

Tabela 7 – Análise de Desempenho do Aluno (A-01) no Problema (P-01)

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	Questão a) O estudante resolve $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.	5
	Questão b) O estudante resolve $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ corretamente, utilizando a regra da potência e da constante, após substitui o valor da variável x chegando assim ao resultado.	5
	Questão c) O estudante resolve $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ corretamente por meio da regra da potência $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$ e da constante $\frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} [f(x)]$. E também realiza o cálculo da segunda e terceira derivada fazendo uso das mesmas regras, mas deixa a terceira derivada incompleta.	5
	Questão d) O estudante resolve $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$ incorretamente, pois substitui a função u na y mas não deriva chega a formar uma equação do 2º grau e calcula o x' e x'' .	1
	Questão e) O estudante resolve $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente, pois substitui a função u na y mas não deriva chega a formar uma equação do 2º grau e calcula o x' e x'' chegando a um resultado não solicitado na questão.	1

No primeiro problema conforme (Tabela 7), o estudante (A-01) na questão a), b) e c) demonstrou ter habilidade em resolver o modelo, pois fez uso dos métodos adequados para solucionar, com a regra da potência e da constante, sendo estas as técnicas mais usadas no cálculo de derivadas, também realizou as substituições necessárias no resultado da função encontrada. Nas questões d) e e) realizou o processo de resolução incorretamente, pois neste momento para desenvolver o problema com êxito seria preciso conhecer as outras técnicas de derivação e escolher a adequada para solução da questão, leva-se a perceber que o estudante ainda não possuía este conhecimento, pois se tratava de uma função composta sendo de suma importância a utilização da regra da cadeia.

Todavia, o processo foi desenvolvido corretamente na maioria das questões, podendo-se perceber que o estudante apresentou ter conhecimento do assunto de derivadas de função de uma variável. Porém, este conteúdo abrange várias técnicas para sua resolução o que implica na apresentação de resposta incorreta pela falta de utilização da técnica adequada. No entanto, todas as regras de derivação em que estava embasada a prova diagnóstica deveriam ser de conhecimento do estudante, pois a disciplina de Cálculo I consta na grade curricular para ser cursada no 2º semestre.

Na análise do problema 1 de modo geral infere-se que os estudantes possuem conhecimento prévio razoável das regras de derivação para resolver questões que tenham como modelo matemático derivada de função de uma variável. Mas, demonstram dificuldades em resolver questões de funções compostas, o que resultou a baixa na quantidade de respostas corretas das questões d) e e) do problema 1.

No problema (P-02), buscou-se a habilidade na interpretação do resultado da derivada de função a partir da solução do modelo matemático, então, a ação de destaque é a interpretação da solução.

Problema 02: Um empresário calcula que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o lucro é dado por $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades? Justifique a resposta.

No segundo problema, o estudante (A-01) demonstrou ter habilidade em utilizar o método adequado para resolver o problema, realizou o processo corretamente. Porém, devido o modelo matemático se encontrar explícito no problema, deduz-se que o mesmo não soube interpretar os dados fornecidos na questão que lhe serviriam para dar resposta ao objetivo do problema.

Desse modo não justificou sua resposta, mesmo resolvendo o cálculo da derivada na solução do modelo, demonstrou que tem pouca habilidade quanto a problemas contextualizados, conforme demonstração na (Tabela 8):

Tabela 8 – Análise de Desempenho do Aluno (A-01) no Problema (P-02)		
Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
1ª Ação: Compreender o problema	Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	3
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	O estudante resolve o problema $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ corretamente fazendo uso das regras derivação, regra da potência e da constante, mas ao substituir o valor de x na derivada encontrada $f(x) = -800x + 6.800$, realiza o cálculo, mas deixa o resultado incompleto, impossibilitando assim a interpretação da solução.	5
4ª Ação: Interpretar a solução	O estudante ao substituir o valor de x na derivada encontrada $f(x) = -800x + 6.800$, realiza o cálculo, mas deixa o resultado incompleto, impossibilitando assim a interpretação da solução.	2

Pode-se destacar que houve compreensão quanto a escolha do método adequado para dar solução ao modelo matemático. Mas, subentende-se que esse conhecimento não se estendeu de forma expressiva quando se trata de substituição de variáveis e de uma posterior interpretação desses dados.

Quanto aos demais estudantes, apresentaram dificuldades na resolução do problema 2, pois, não responderam corretamente às ações pedidas no problema. Identificou-se nas respostas que os estudantes possuem pouca habilidade para resolver problemas contextualizados. Considerando que não souberam extrair os dados significativos e conseqüentemente não resolveram o modelo, como também não interpretaram a solução, o que se conclui de fato, que não possuíam no momento habilidades para solucionar problemas com aplicações da derivada de função de uma variável.

Para o problema (P-03) a resolução do modelo necessitava de maior atenção para a posterior realização da interpretação, sendo a solução do modelo a ação principal.

Problema 03: Um fabricante de câmeras digitais estima que, quando x centenas de câmeras são produzidas, o lucro total é $f(x) = -0,0035x^3 + 0,07x^2 + 25 - 200$ milhares de reais.

a) Determine a função lucro marginal.

b) Determine o lucro marginal para níveis de produção $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.

c) Interprete os resultados do item (b).

Neste problema, observou-se pouca compreensão do estudante (A-01), pois não foi possível verificar resposta ao referido problema, pôde-se subentender que isso tenha ocorrido por se tratar de um problema que apresentou conceitos com significado desconhecido pelo aluno, o que pode ter contribuído para nem ao menos tentar solucionar o modelo. Referindo-se aos demais estudantes de modo geral, apenas o (A-02) apresentou resposta ao problema, por meio de tentativa de ensaio e erro, não obtendo a resposta correta.

Por fim, o problema (P-04), apresentava como ação principal a interpretação da solução, sendo primeiramente necessário solucionar o modelo para expressar a interpretação.

Problema 04: Um fabricante estima que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o custo total é $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ reais e que todas as x unidades são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais por unidade.

- a) Determine o custo marginal e a receita marginal.
- b) Use o custo marginal para estimar o custo para produzir a nona unidade.
- c) Qual é o custo real para produzir a nona unidade?
- d) Use a receita marginal para estimar a receita obtida com a venda da nona unidade.
- e) Qual é a receita real obtida com a venda da nona unidade?

O problema em questão, não foi escrito nenhuma resposta pelo estudante (A-01). Concluiu-se então que este não possuía conhecimento suficiente quanto aos termos utilizados no problema, dificultando assim a compreensão do mesmo por não estar no momento habituado com as palavras encontradas no problema. No que se refere aos demais alunos, também se obteve as mesmas conclusões quanto à insuficiência de conhecimento dos conceitos apresentados.

Em suma, o desempenho qualitativo do estudante (A-01) nos quatro problemas do teste, de acordo com a ação essencial dos referidos problemas, observou-se conforme as características qualitativas que o estudante expos na resolução do problema (P-01), composto nas questões a), b) e c) corretamente, implicando que a assimilação foi realizada em nível totalmente correto na aplicação do conceito de derivadas de função de uma variável. Porém, nas questões d) e e) a resolução foi incorreta, o que representou que sua assimilação ocorreu em nível incorreto, demonstrando baixo desempenho para aplicação regra da cadeia em derivadas de funções compostas.

No problema (P-02), o estudante (A-01), na primeira ação percebeu-se que ele não destacou os dados e o objetivo do problema. Porém, pode ter compreendido implicitamente, demonstrando, ao realizar cálculos matemáticos de forma totalmente correta, apesar de demonstrar a solução do modelo corretamente, não foi suficiente para interpretar a solução e assim, concluir o problema corretamente, provavelmente havia elementos desconhecidos para este estudante, gerando assim um resultado incompleto. No problema (P-03 e P-04), não foi

realizada nenhuma ação, possivelmente o estudante ainda não possuía conhecimentos suficientes para aplicar os conceitos derivadas em relação aos conceitos de custo marginal e lucro marginal no contexto da situação problema.

Estes procedimentos de análise também foram realizados para os estudantes (A-02 até A-09). Porém, os dados encontram-se compostos na tabela análise de desempenho dos resultados qualitativos e quantitativos do (Apêndice F).

Na análise dos resultados, por meio dos indicadores essenciais que foram desenvolvidos na forma quantitativa a representar o desempenho, evidencia-se em resumo que o aluno (A-01) nos quatro problemas, se percebeu que a ação solucionar o modelo foi satisfatória nos dois primeiros, a ação compreender o problema também foi satisfatória. Porém as demais ações: construir o modelo e interpretar a solução foram insatisfatórias, no que se refere a aplicação do conceito de derivadas de função de uma variável, conforme os resultados, destacados na síntese do desempenho dos estudantes no (Apêndice C).

O resultado quantitativo da análise foi representado por uma escala de 1 até 5 pontos de acordo com os indicadores essenciais. Desse modo, a (Tabela 9) apresenta o resultado quantitativo do desempenho dos estudantes nos problemas do nível de partida.

Tabela 9- Resultado do Nível de Partida

ALUNO	P01		P02		P03		P04			
	3ª A	1ª A	3ª A	4ª A	3ª A	4ª A	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A
A01	5	3	5	2	1	1	1	1	1	1
A02	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A03	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A04	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A05	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A06	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A07	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A08	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A09	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Media	3,4	1,3	1,5	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Desvio Padrão	1,8	0,7	1,3	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Mediana	5,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

O desempenho do aluno (A-02), de acordo com os indicadores das ações, no primeiro problema, apresentou habilidades quanto à aplicação da derivada de uma função simples por meio de regras específicas, quando esta não requer substituição de variáveis. A ação essencial foi solucionada corretamente nas questões a) e c), no entanto, na questão b) a qual se faz necessário substituir valores, realizou a ação essencial incorretamente. Nas questões d) e e) que

se referia a derivada de uma função composta, a qual requeria o uso da regra da cadeia ainda não utilizada até o momento nas questões anteriores do problema, realizou de forma parcialmente correta por meio das regras de derivação para função simples. Portanto, subentende-se que seu conhecimento apresentou-se de forma totalmente correta na utilização da regra da potência e da constante em derivadas de funções simples, e incorreta na resolução de derivadas de funções compostas.

Nos problemas (P-02, P-03 e P-04), suas respostas não foram satisfatórias, pois teve dificuldade em compreender o problema, devido à pouca familiaridade com problemas contextualizados, bem como o desconhecimento do significado de determinados conceitos pertencentes ao problema, implicando em um resultado incorreto. Nesse sentido, a assimilação ocorreu de forma incorreta. No estudante (A-03), não foi possível destacar as habilidades, pois não respondeu os problemas (P-01, P-02, P-03 e P-04).

Na análise sintetizada do estudante (A-04), demonstrou pouca habilidade na utilização da regra de derivadas para resolver funções de uma variável, pois nas questões a), c), d), e) resolve as derivadas incorretamente, busca solucionar o modelo por tentativa de ensaio e erro, mas não obteve sucesso. Resolve a questão b) de forma parcialmente correta utilizando a regra da potência e da constante, pois ao final não substitui o valor da variável no resultado encontrado. Desse modo, a assimilação deste aluno quanto ao conceito de derivadas e suas regras se estabeleceram de maneira razoavelmente correta na questão b), e incorreta nas demais.

No problema (P-02), executou ações incorretamente por tentativa de ensaio e erro, não resolveu a ação essencial do problema, o que leva a compreender que o estudante neste momento não apresentava explicitamente o conhecimento do conteúdo de derivadas e suas aplicações, desconhecendo assim como justificar a resposta do problema, como também o fato deste não estar habituado a resolver problemas, tendo conhecimento apenas de questões tradicionais.

O problema (P-03 e P-04), não resolveu, podendo este fato ter ocorrido pela pouca familiaridade do estudante com os problemas contextualizados e o desconhecimento do significado de palavras encontradas nos dois problemas em questão, logo, pode-se inferir que seus conhecimentos prévios encontravam-se incorretos, ou seja, neste momento eram insuficientes para assimilar o novo conhecimento, conforme o resultado demonstrado na tabela:

O estudante (A-05), no problema (P-01), resolveu a ação essencial na questão b) de maneira parcialmente correta, pois não apresentou habilidade quanto à substituição de valores de variáveis, a qual se encontrava explícita na questão, não resolveu a questão a). Nas questões c), d) e e) resolveu incorretamente por tentativa de ensaio e erro. Apresentou assim, pouca

compreensão quanto ao estudo de derivadas, conclui-se que nas questões a), c), d) e e), a ação foi realizada de maneira incorreta na questão b) razoavelmente correto.

O problema (P-02) exigia o conhecimento da aplicação de derivadas na produção de um produto o que requeria do estudante saber o significado de lucro, nível de produção e da própria taxa de variação que seria a derivada. Portanto, demonstrou não ter compreendido o problema e buscou resolver a solução por tentativa de ensaio e erro, chegando a um resultado incorreto, não resolveu a ação essencial. Desse modo, se deduz que o seu conhecimento prévio, apresentou-se como incorreto, no que se refere ao conteúdo de derivadas de função de uma variável, os problemas (P-03 e P-04) não foram resolvidos pelo estudante.

No desempenho do estudante (A-06), observou-se que, resolveu apenas o primeiro problema da prova diagnóstica. Portanto, no problema (P-01) resolveu a questão a) corretamente fazendo uso das regras de derivação da potência e da constante, solucionou o modelo, sendo esta a ação essencial. Nas questões b) e d) realizou cálculos por meio das regras de derivação, mas não utilizou a regra adequada na questão d) e, ao final, não substituiu o valor da variável no resultado encontrado, logo, desenvolveu a ação na forma parcialmente correta. Resolveu as questões c) e e) incorretamente por falta da utilização da regra específica na resolução da questão. Portanto, observou-se que suas habilidades na questão a) foram realizadas de maneira totalmente correta, nas questões b) e d) razoavelmente correto e nas questões c) e e) incorreto. No Problema (P-02, P-03 e P-04) deduz-se que não tenha sido resolvido pelo estudante por se tratar de problemas contextualizados e com palavras de significados desconhecidos para o mesmo, como: custo marginal, lucro marginal e produção:

O desempenho alcançado pelo estudante (A-07), conforme os indicadores essenciais das ações, no problema (P-01) na questão a) o aluno realizou todas as ações completas, fazendo uso das regras de derivação da potência e da constante, se tratava de uma questão simples de derivadas de função de uma variável. Na questão d) realizou os cálculos matemáticos de maneira parcialmente correta, pois sua resolução apresentou-se correta apenas na variável u , demonstrou ter dificuldade em substituição de variáveis no resultado encontrado. Resolveu incorretamente as questões b) e c) apesar de serem derivadas de funções simples, apresentando assim conhecimento insuficiente na execução dos cálculos de derivadas, e na questão e) resolveu também incorretamente por desconhecimento da regra adequada para chegar a um resultado satisfatório, se tratava de uma função composta que exige o conhecimento da regra da cadeia.

Os problemas (P-02, P-03 e P-04), não foram resolvidos pelo estudante, o fato de não ter familiaridade com este tipo de problemas pode ter levado o estudante a não compreender o

problema, e conseqüentemente não apresentar uma solução. Logo, suas habilidades de assimilação no conteúdo de derivadas de funções de uma variável são totalmente corretas na questão a), razoavelmente correta na questão d) e incorreta nas questões b), c) e e) e nos problemas não resolvidos.

O primeiro problema apresentava um modelo matemático tradicional, o estudante (A-08) desenvolveu a ação essencial, que era solucionar o modelo na questão a) satisfatoriamente, executou os cálculos corretamente por meio do uso das regras da derivada. Na questão b) apesar de realizar os cálculos corretamente, ao final não fez a substituição da variável explicitamente na questão deixando-a incompleta, deduz-se que isso pode ter ocorrido por falta de concentração ou conhecimento insuficiente no uso de substituição de valores de variáveis. A resolução da questão c) ocorreu de forma parcialmente correta, apesar de realizar todos os cálculos corretamente, pois faltou-lhe um pequeno detalhe, substituir o valor da variável no resultado encontrado, além disso, fez cálculos não pedidos na questão resolvendo a segunda derivada. Não resolveu as questões d) e e) pois este requeria o conhecimento da regra da cadeia para sua resolução.

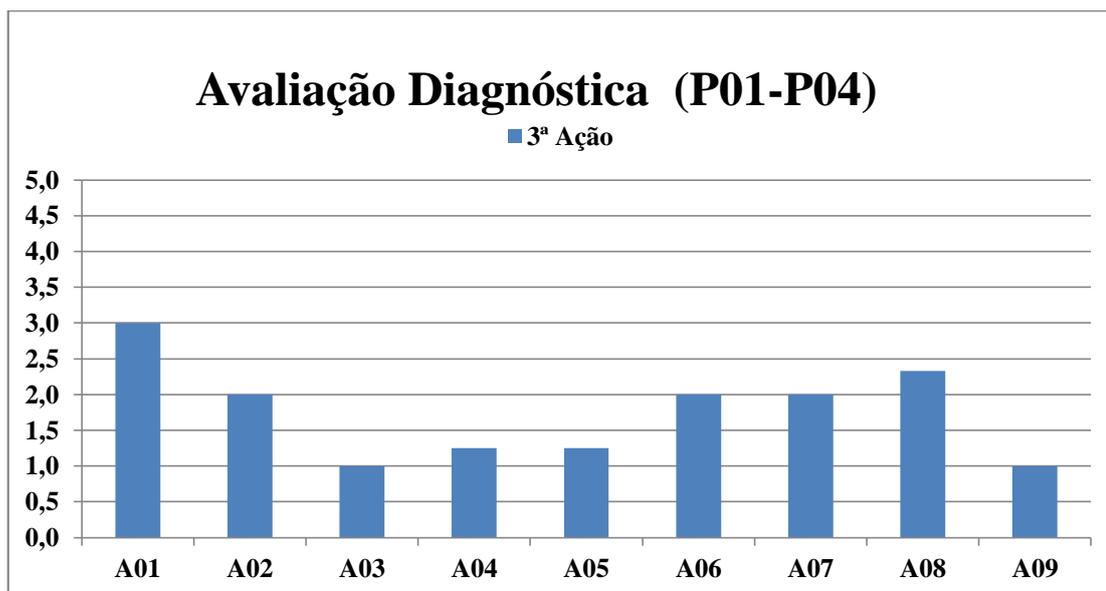
O problema (P-02), de derivadas e suas aplicações exigia o conhecimento do significado de palavras utilizadas no cálculo de produção, este problema o estudante resolve de forma incompleta e incorreta, pois utiliza valores diferentes do explicitado no problema, assim, não justifica sua resposta a qual é a ação essencial neste momento.

O problema (P-03 e P-04) não resolveu, podendo isso ter ocorrido por se tratar de problema contextualizado que exigia um conhecimento mais preciso de derivadas de funções de uma variável por meio de problemas. Conforme a análise, a habilidade do estudante quanto ao conteúdo de derivadas foi totalmente correto na questão a), na questão b) razoavelmente correto, na questão c) correto e nas questões d) e e) incorreto. No problema (P-02, P-03 e P-04) ocorreu de forma incorreta para o conteúdo de derivadas e suas aplicações. O estudante (A-09) faltou na aplicação da prova diagnóstica, por isso, não foi possível destacar suas habilidades nesta fase.

Sintetiza-se o desempenho dos alunos quanto a terceira ação (solucionar o problema) sendo considerada, nesta fase de aplicação, como ação essencial para diagnosticar a habilidade dos estudantes quanto a solução de problemas aplicando o conceito de derivadas de função de uma variável.

Portanto, o (Gráfico 1), demonstra a média alcançada pelos estudantes, do desempenho no desenvolvimento da 3ª ação dos problemas (P-01 a P-04) do teste diagnóstico.

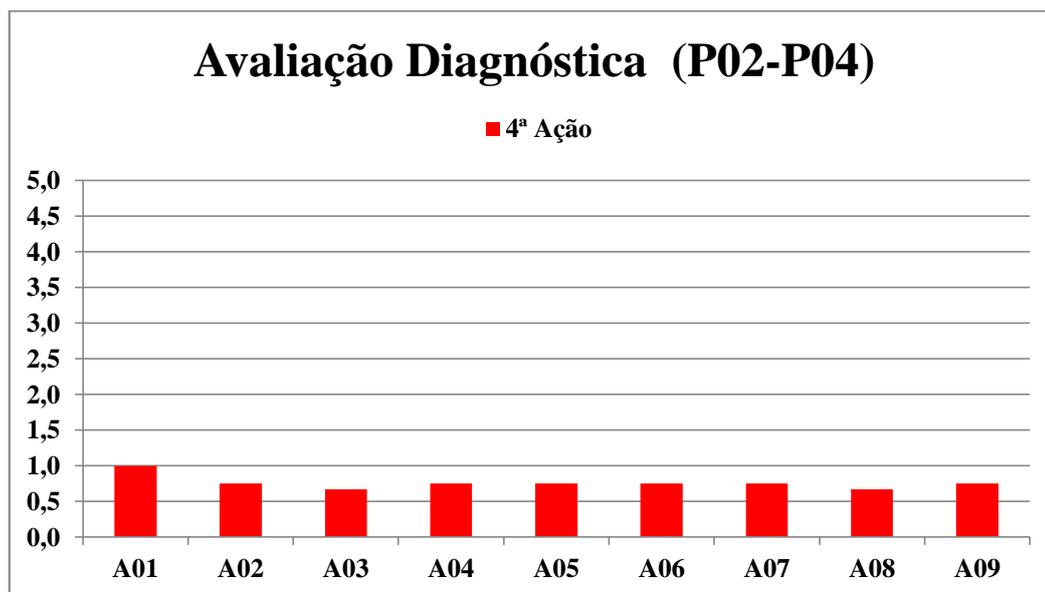
Gráfico 1 - Média de Desempenho da Terceira Ação da Avaliação Diagnóstica



O gráfico 1 demonstra que o estudante (A-01 e A-08) apresenta resultado mais expressivo em relação aos demais ao executar a terceira ação da Atividade de Situação Problema em derivadas de função de uma variável na solução do modelo matemático. Então, o aluno A-01 possui realmente mais conhecimento matemático no assunto para solucionar o problema, bem como o estudante A-08. E os demais alunos nesta fase apresentaram conhecimento insuficiente no uso das regras de derivação adequadas a cada problema.

Apresenta-se o desempenho dos estudantes na quarta ação (interpretar a solução) como uma das ações essenciais nesta fase de forma a evidenciar as habilidades dos alunos no conteúdo de derivadas. Conforme o (Gráfico 2) em relação a 4ª ação nos problemas (P-02 a P-04) do teste diagnóstico, obtemos:

Gráfico 2 – Média de Desempenho da Quarta Ação da Avaliação Diagnóstica



Neste gráfico, pode-se perceber que a ação interpretar a solução foi insatisfatória para os estudantes de um modo geral, pois não atingiram a média desejada, mostrando assim não terem conhecimento prévios suficientes para interpretar um problema no momento.

Portanto, de acordo com os dados dos (Gráficos 1 e 2), na terceira ação dos problemas, apenas o estudante A-01 atingiu mais da metade da média na solução do modelo, porém suas habilidades quanto ao conteúdo matemático não são apresentados de maneira totalmente correta para todas as regras de derivação, pois quando se trata da regra da cadeia seus conhecimentos são incorretos. No entanto, o A-01 se destacou em relação aos demais estudantes, atingiu um nível correto de ação, os alunos (A-02 ao A-08) alcançaram desempenho razoavelmente correto. Na quarta ação, os nove estudantes apresentaram conhecimento muito abaixo da média, dessa forma, quanto a interpretação da solução estes encontravam-se no nível incorreto de conhecimentos prévios para interpretar um problema matemático.

Conforme análise dos conhecimentos prévios dos estudantes, no geral, o nível foi satisfatório no problema 01, que se referia a exercícios com modelo matemático tradicional de conhecimento dos alunos, e insatisfatório para os problemas (P-02 a P-04). Portanto, observou-se que os estudantes solucionaram os problemas com modelos já disponíveis na questão, porém não obtiveram o mesmo êxito em problemas contextualizados para elaboração do modelo matemático. Não foi possível analisar o problema P-03 e P-04, pois este não foi desenvolvido pelo aluno.

3.2.2 Desempenho da Assimilação da Avaliação Formativa

Nesta fase o conteúdo de derivadas parciais por meio de atividades de situações problemas foram desenvolvidos nas aulas, utilizando problemas contextualizado com o assunto de derivadas parciais e suas aplicações. Para a realização da avaliação formativa foram escolhidos quatro problemas. De acordo com os instrumentos avaliativos deste processo ora conhecidos como provas de lápis e papel possibilitou nos seus resultados a transformação em dados qualitativos para a análise do desempenho de cada aluno envolvido do processo.

Para a execução satisfatória do plano foi necessário desenvolver o planejamento da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais. Por meio dos problemas escolhidos foi possível perceber a assimilação das definições e conceitos de Derivadas de funções de várias variáveis e suas aplicações pelos estudantes, de acordo com a demonstração do desempenho individual do processo.

Os resultados da assimilação dos estudantes do cálculo III do Polo de Alto Alegre, encontram-se descritos no (Apêndice G), os resultados conceituais das análises dos problemas, sumarizados do formulário de análise apresenta o resultado qualitativo e quantitativo do Desempenho da Fase Formativa do Processo no qual destaca todo o desenvolvimento das ações de cada problema escolhido para a análise nesta fase.

Os conceitos de desempenho qualitativo conforme as características das ações da Atividade de Situações Problema encontram-se demonstrados nos quadros os quais estão relacionados de acordo com o contexto de cada problema, destacando sua ação essencial, de forma a solucionar o problema. Os indicadores quantitativos estão classificados em uma escala de [1-5], o qual explicitam o desempenho das ações de acordo com o indicador essencial e os outros indicadores relacionados as ações contidas no problema.

Nos problemas analisados, no geral, deu-se atenção às características das ações essenciais. No problema (P-01), teve como objetivo apresentar os conceitos essenciais do conteúdo de Derivadas Parciais, foi analisada a habilidade do estudante na forma materializada, quanto aos procedimentos necessários para resolver o cálculo da derivada. O resultado foi evidenciado por meio da utilização da definição de derivadas parciais e sua regras adequadas ao contexto da questão. Desse modo, a ação essencial do referido problema foi solucionar o modelo matemático por meio das regras de derivação ou definição formal.

Problema 01: De acordo com a definição calcule a derivada parcial em relação a x e y

$$a) f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$$

No problema (P-02), conforme análise foi observada a ação essencial interpretar a solução do modelo da função que possibilitaria calcular a área superficial do corpo de uma criança em relação ao seu peso e sua altura, este problema está aplicado à área da medicina, resolvido por meio de derivadas parciais.

Problema 02: ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO É dada pela expressão empírica $S(W, H) = 0,0072W^{0,425}H^{0,725}$, onde W (Kg) e H (cm), são, respectivamente, o peso e a altura da pessoa. No momento, uma certa criança pesa 34Kg e tem 1 m e 20 cm de altura.

- Determine os dados do problema.
- Calcule as derivadas parciais $S_w(50,163)$ e $S_H(50, 163)$ e interprete-as como taxas de variação.
- Estime qual será a variação da área superficial se a criança engordar 1 Kg e altura permanecer inalterada.

No problema (P-03) na análise foi examinado o conceito de derivadas parciais no processo de assimilação dos estudantes quanto ao uso das regras de derivação no cálculo das variáveis explícitas no problema. Apresentou-se como ação essencial (4ª ação) a interpretação da solução, para sua compreensão se fazia necessário o conhecimento do significado de estimativa, capital imobilizado e produtividade marginal, pois este problema encontrava-se aplicado a área da produção.

Problema 03: PRODUTIVIDADE MARGINAL Um fabricante estima que a produção anual de uma certa fábrica é dada por $Q(K, L) = 20K^{0,3}L^{0,7}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão de obra em homens-horas.

- Determinar a produtividade marginal do capital, Q_k , e a produtividade marginal de mão de obra, Q_L . Para um capital imobilizado de R\$ 630.000,00 e um volume de mão de obra de 830 homens-horas.
- Para aumentar rapidamente a produtividade, o fabricante deve aumentar o investimento ou a mão de obra?

O problema (P-04), apresenta-se no mesmo contexto de aplicação do problema anterior. Neste analisou-se a (4ª Ação) interpretação da solução quanto ao desenvolvimento do conceito de derivadas parciais assimilado pelos estudantes. Destaca-se que, neste momento, os estudantes já haviam tido familiaridade em aula prática com problemas análogos ao (P-04).

Problema 04: Estima-se que a produção semanal de uma fábrica é dada pela função $Q(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, onde x é o número de operários especializados e y o número de operários não especializados utilizados no trabalho. No momento, a mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados e 60 operários não especializados. Use a análise marginal para estimar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

- Determine os dados do problema. Qual o objetivo do problema?
- Determine as variáveis e construir a função que envolve duas variáveis.
- Solucione o modelo matemático.
- Interprete a solução.

Dos problemas explicitados, obtiveram-se seis respostas nos problemas (P-01), (P-02), (P-03) e (P-04). Nesta fase da pesquisa três estudantes não compareceram realização do teste formativo.

O resumo da demonstração qualitativa do desempenho das ações dos estudantes na fase formativa por meio de indicadores quantitativos, referente às soluções resolvidas pelos estudantes nos quatro problemas escolhidos para análise, encontram-se no (Apêndice D).

Na análise do resultado do estudante (A-01), observou-se que nesta fase houve uma melhora quanto ao seu desempenho no desenvolvimento das atividades, pois de certa forma superou o resultado do teste diagnóstico. Porém, quanto à assimilação das regras de derivação e dos conceitos de derivadas parciais, apresentam-se de forma razoavelmente correto.

O estudante (A-01), de acordo com a resposta das suas soluções e conforme as características das ações a execução do Problema (P-01), trabalhou de forma totalmente correta, pois, por meio do uso do conceito de derivadas parciais, bem como a utilização da regra da potência, desenvolveu o problema corretamente, dando solução ao modelo matemático, sendo esta a ação essencial.

No problema (P-02), o estudante demonstrou pouca atenção ao realizar ação requerida no problema o que o levou a não obter êxito na resolução, isso pode ter ocorrido devido ao fato deste problema não ser comum no estudo do cálculo para a área específica da matemática, isto pode ter dificultado a compreensão e interpretação do problema. Portanto, o aluno realizou a ação de maneira razoavelmente correta, pois, não descreveu a ação essencial interpretar a solução do modelo matemático.

Conforme o resposta do problema (P-03) o estudante demonstrou compreender o problema implicitamente, devido a não ter detalhado as condições do problema que se encontravam explícitas no mesmo. Realizou corretamente a terceira ação (solucionar o problema) fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais, fez as substituições necessárias dos valores de Q_K e Q_L . Assim, descreveu a ação essencial (interpretar a solução) corretamente, apresentando resposta ao objetivo do problema, sua habilidade de assimilação ocorreram em nível totalmente correto.

No processo de resolução do (P-04) na análise, o aluno apresentou as condições do problema de maneira parcialmente correta. Fez uso da regra da potência e da constante, bem como do conceito de derivadas parciais construindo assim um modelo matemático em relação à variável x e y , porém não realizou o cálculo de estimativa da produção. Ao desenvolver a substituição de valores na função, chegou a um resultado incorreto da variação exata, isto pode ter ocorrido por falta de atenção na aplicação das operações matemáticas na resolução do

problema, como também devido ao pouco tempo que lhe restou para resolver, o que pode ter comprometido o desenvolvimento da ação essencial (interpretar a solução), que foi realizada de maneira incompleta e incorreta. Desse modo, o estudante resolveu o problema de forma razoavelmente correta.

O resultado quantitativo da análise foi representado por uma escala de 1 até 5 pontos de acordo com os indicadores essenciais. Assim, a (Tabela 10) apresenta o resultado quantitativo do desempenho dos estudantes nos problemas da Avaliação Formativa.

Tabela 10 - Resultado da Avaliação Formativa

ALUNO	P05	P06			P07			P08			
	3ªA	1ªA	3ªA	4ªA	1ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
A01	5	2	2	1	1	5	5	2	1	3	1
A02	5	2	3	1	2	2	1	5	3	5	3
A03	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A04	5	1	1	1	1	3	5	1	1	5	5
A05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A06	3	2	5	5	1	5	5	5	1	4	4
A07	3	2	3	2	1	5	5	1	3	5	5
A08	5	1	3	1	1	5	5	1	1	1	1
A09	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Media	3,2	1,4	2,2	1,6	1,1	3,1	3,2	2,0	1,4	2,9	2,4
Desvio Padrão	1,7	0,5	1,3	1,3	0,3	1,8	2,0	1,6	0,8	1,8	1,7
Mediana	3,0	1,0	2,0	1,0	1,0	3,0	5,0	1,0	1,0	3,0	1,0

Na análise de desempenho, o estudante (A-02), no problema (P-01), desenvolveu a ação essencial de forma totalmente correta, pois fez uso do conceito de derivadas parciais e da regra da potência, derivando em relação a x enquanto y permaneceu constante e após em relação a y enquanto x permaneceu constante.

No problema (P-02), de acordo com os dados analisados, o estudante descreveu as condições do problema de maneira parcialmente correta, apresentou o objetivo do problema de forma incompleta, apesar das informações necessárias estarem explícitas no problema. Na solução do modelo realizou os cálculos corretamente em relação a w , mas em relação à h , ao final do processo, não multiplicou os coeficientes, deixou a resolução incompleta. Não realizou as substituições de valores de variáveis conforme descrito no problema. Devido a ter calculado a estimativa da variação do peso da criança em relação h por meio do ensaio e erro, apresentou resposta ao objetivo do problema incorretamente, pois o correto seria calcular a estimativa em relação a w . Percebeu-se que as trocas erradas de variáveis realizadas pelo estudante bem como os cálculos incompletos podem ter ocorrido por falta de concentração, uma vez que durante o

processo também realizou cálculos corretamente. Portanto o problema foi desenvolvido pelo aluno em nível incorreto, pois sua resolução quanto à ação essencial interpretar a solução foi insatisfatória.

Conforme análise de desempenho do aluno no problema (P-03), demonstrou pouco conhecimento quanto à compreensão do problema, porém todas as informações necessárias estavam explícitas no problema. Ao desenvolver os cálculos, o estudante até fez uso das regras adequadas e do conceito de derivadas parciais, mas transcreve valores do expoente diferente do apresentado no problema em determinado cálculo, o que o levou a resultados incorretos. No momento pôde-se perceber que faltou atenção do aluno ao resolver os cálculos, pois se tratava de problemas que requeriam bastante atenção na execução da resposta. Apresentou resposta incorreta ao objetivo do problema, demonstrando assim que suas habilidades ocorreram de forma incorreta.

No problema (P-04), o estudante demonstra ter compreendido o problema ao descrever os dados e objetivo do problema corretamente, determina as variáveis existentes, mas não apresenta o modelo matemático conforme solicitado, porém este encontrava-se explícito no problema. No processo de resolução utilizou corretamente a regra da potência, da constante e o conceito de derivadas parciais, executou corretamente cálculos não pedidos no problema em relação a y . Realizou substituições adequadas estimando assim a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado. Porém, ao realizar a interpretação da solução que era a ação essencial deste problema, a fez de forma parcialmente correta, apesar dos seus cálculos estarem corretos, pois percebeu-se que trocou o resultado de x por y na interpretação, sendo que não precisava resolver cálculos em relação a y no problema. Quanto à diferença do estudante ter desenvolvido este problema de forma satisfatória e os demais de maneira pouco satisfatória, pode ter ocorrido pelo fato do estudante, em atividades práticas em sala de aula, ter resolvido um problema semelhante a este. Contudo, pode-se dizer que o estudante resolveu este problema de forma correta. O estudante (A-03) faltou na aplicação da avaliação formativa.

No problema (P-01), o estudante (A-04) desenvolveu a ação em nível totalmente correto, pois na resolução do problema soube fazer uso corretamente dos conceitos essenciais de derivadas parciais dando solução ao modelo matemático. Enquanto que no (P-02), o aluno executou a ação na forma incorreta, devido a não ter feito uso da regra de derivação e nem do conceito de derivadas parciais, deixou de apresentar a solução, apenas tentou substituir valores por meio de tentativa de ensaio e erro, não realizou a ação essencial interpretar a solução.

No entanto, no desempenho do problema (P-03), o estudante melhorou quanto ao desenvolvimento da resolução do problema bem como sua interpretação. Não descreveu as

condições do problema, porém os dados encontravam-se explícitos no problema. Realizou os cálculos de maneira parcialmente correta, fez uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais, resolve em relação K corretamente, mas em relação a L troca o sinal do expoente de negativo para positivo chegando assim em um resultado incorreto em L . Por esse motivo, ao realizar as substituições de valores nas variáveis, os resultados foram incorretos. Com os resultados encontrados, o estudante apresentou a interpretação da solução corretamente, descrevendo que é necessário aumentar a mão de obra para aumentar a produção. Portanto sua assimilação no processo de desenvolvimento ao resolver o problema ocorreu em nível correto.

No problema (P-04), observou-se que o estudante não apresentou as condições do problema, os objetivos do problema, suas variáveis e modelo matemático. Porém, devido a estas informações estarem contidas no problema subentendeu-se que o estudante compreendeu o enunciado do problema, pois realizou as outras ações com êxito. Executou os cálculos corretamente, por meio dos conceitos adequados ao problema, se expressou além do solicitado derivando em relação a y . O aluno estimou a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado, interpretando assim a solução do problema de forma satisfatória. Logo, suas ideias no assunto de derivadas parciais e suas aplicações foram instituídas na forma correta. O estudante (A-05) faltou na aplicação da avaliação formativa.

O estudante (A-06), no problema (A-01), apesar de ter feito uso dos métodos adequados de derivação para dar solução ao modelo matemático, resolveu o problema de maneira parcialmente correta, pois, ao realizar o cálculo em relação a x , ao final da resolução, cometeu um pequeno erro, mas em relação a y obteve êxito. Por conseguinte, o estudante realizou a ação essencial de forma correta.

No problema (P-02), o aluno apresentou a compreensão do problema de maneira parcial, mesmo contendo as informações necessárias para a resolução no problema. Solucionou o modelo matemático satisfatoriamente de acordo com a aplicação do conceito de derivadas parciais em relação a w e h , bem como na substituição dos valores das variáveis nas funções correspondentes, chegou a resolver com êxito cálculos não solicitados no problema. Descreveu a resposta ao objetivo do problema estimando corretamente a variação da área superficial do corpo de uma criança, quando esta engorda 1 kg e sua altura permanece constante. Portanto desenvolveu a ação essencial corretamente, apresentou um desempenho da ação em nível totalmente correto.

No problema (P-03), apesar do estudante não ter demonstrado a compreensão do problema, deduz-se que tenha compreendido implicitamente, pois os dados estavam explícitos no problema. Prosseguiu desenvolvendo a resolução do modelo por meio do conceito de

derivadas parciais corretamente, executou as substituições de valores necessárias com êxito, chegou assim a interpretar a solução com êxito, afirmando “*que se faz necessário aumentar a mão de obra, pois a mesma é maior que o investimento, obtendo assim um aumento na produção*”. Desse modo, obteve neste problema a ação em nível totalmente correto.

De acordo com o problema (P-04), o estudante descreveu as condições do problema e seu objetivo corretamente, no entanto não apresentou as operações da construção do modelo matemático, mas se subteu da análise que ele reconheceu a função dada, pois a utilizou na solução do modelo. Realizou os cálculos por meio das regras e definição de derivadas parciais de forma parcialmente correta, além disso resolveu também de maneira correta cálculos não obrigatórios no problema. Interpreta a solução por meio de tentativa de ensaio e erro corretamente, desenvolve outros cálculos dando possibilidade a reformulação no problema. Logo, suas habilidades de assimilação das ações ocorreram na forma correta.

No problema (P-01), o estudante (A-07) solucionou o modelo matemático por meio dos conceitos essenciais de derivadas parciais e suas aplicações de forma parcialmente satisfatória. De acordo com os dados analisados do problema (P-02), o aluno apresenta a compreensão do modelo de maneira incompleta, ao solucionar o modelo em determinado momento observou-se que realizou cálculos corretamente com os métodos adequados e, por conseguinte, resolveu cálculos por meio de tentativa de ensaio e erro incorretamente, durante sua resolução desenvolveu cálculos não solicitados em relação a h corretamente, destacando a possibilidade de reformular o problema. Realizou a ação essencial interpretar a solução incorretamente por tentativa de ensaio e erro, suas ideias quanto aos conceitos necessários para a realização das ações foram razoavelmente corretas.

Observou-se, no problema (P-03), que as condições e objetivo do problema não foram evidenciadas na forma descritiva pelo estudante, mas compreendeu-se na análise que suas percepções quanto ao problema podem ter ocorrido implicitamente uma vez que as informações necessárias para a resolução estavam contidas no problema. Desenvolveu a solução do modelo em relação a K e L de modo satisfatório na execução dos cálculos de derivação. O estudante extraiu dados significativos que o levou a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta. Portanto, o desempenho dos conhecimentos do aluno se desenvolveram na forma totalmente correta.

No problema (P-04), não apresentou a primeira ação compreender o problema conforme solicitado. Porém destaca-se que os dados estavam explícitos no problema o que pôde ter contribuído na melhora na execução das demais ações deste problema. Dentre as operações da construção do modelo as variáveis foram determinadas, mas o modelo matemático não foi

descrito pelo estudante no momento mesmo encontrando-se explícito no problema, no entanto demonstrou saber qual era o modelo matemático, pois chegou ao resultado correto da solução do modelo e conseqüentemente interpretou a solução de maneira satisfatória. Desse modo, por meio da análise, visualizou-se que as habilidade de assimilação do estudante quanto ao problema ocorreu de forma correta.

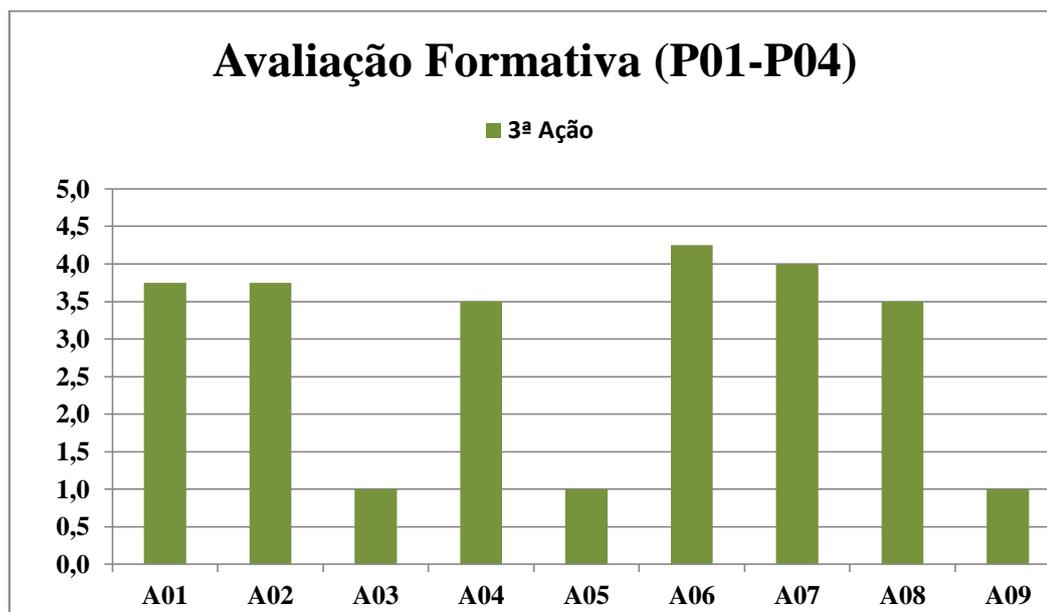
O estudante (A-08) realizou a ação essencial em nível totalmente correta no problema (P-01), solucionou o modelo matemático corretamente. No problema (P-02), não descreve as operações da ação compreender o problema. Realizou cálculos matemáticos por meio das regras de derivação e do conceito de derivadas parciais, como também por tentativa de ensaio e erro, não interpretou a solução que era a ação essencial deste problema. Portanto seu desempenho se desenvolveu em nível incorreto.

No problema (P-03), os dados de compreensão do problema encontravam-se explícitos, o que demonstrou que, apesar do estudante não ter descrito esta ação, foi percebido que ele compreendeu o problema ao realizar as demais ações corretamente. Solucionou o modelo com êxito e apresentou resposta ao objetivo do problema, afirmando que, *“para aumentar a produção e ter mais lucro e produtividade na empresa o fabricante deve aumentar mais a mão de obra que é a mais produtiva até o momento rendendo mais”*. Logo as ideias de aplicação do conceito de derivadas parciais foram realizadas de maneira totalmente correta pelo estudante.

Observou-se, no problema (P-04), que o estudante iniciou a resolução do modelo por tentativa de ensaio e erro e que não desenvolveu as demais ações do problema. Desse modo, os dados foram insuficientes para análise, o desempenho foi totalmente insatisfatório. O estudante (A-09) faltou na aplicação da avaliação formativa.

A seguinte ilustração do (Gráfico 3), apresenta o resultado do desempenho dos estudantes quanto a terceira ação (solucionar o problema), sendo esta uma das ações essenciais dos problemas no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações na fase do teste formativo.

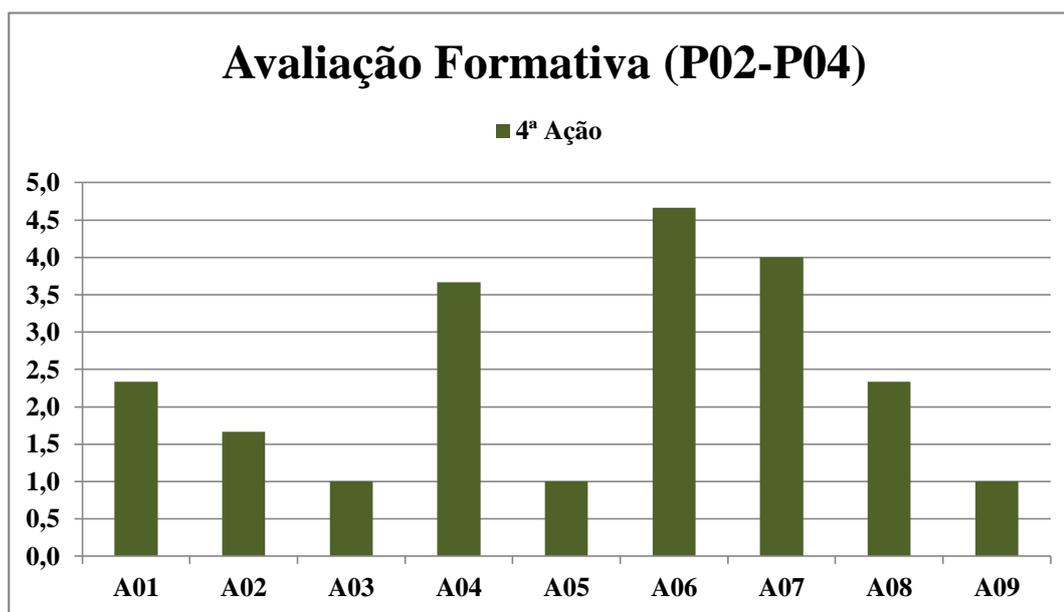
Gráfico 3 – Média de Desempenho da Terceira Ação da Avaliação Formativa



Considerando os dados expostos no (Gráfico 3), mais de 65% dos estudante atingiram um desempenho acima da média, apresentando aplicação satisfatória na solução de problemas com modelos elaborados, no assunto de derivadas parciais e suas aplicações na fase formativa. E menos de 35% dos alunos obtiveram desempenho abaixo da média, sendo observado nos ensaios de solução insuficiência da compreensão do problema, outros por haver faltado no dia da avaliação ou aula presencial.

No (Gráfico 4), apresenta-se o resultado do desempenho dos estudantes quanto a quarta ação (interpretar a solução), sendo esta uma das ações essenciais dos problemas no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações nesta fase do teste formativo.

Gráfico 4 – Média de Desempenho da Quarta Ação da Avaliação Formativa



O aluno A-06 apresentou um desempenho significativo, porém apenas 3 estudantes apresentaram desempenho acima da média quanto à interpretação da ação em problemas envolvendo derivadas parciais. Os demais estudantes (06) obtiveram um resultado abaixo da média. Podendo ter ocorrido insuficiência de compreensão o assunto ou não comparecimento nas aulas explicativas e práticas ou não comparecimento no dia da prova formativa.

Contudo, os estudantes que participaram das aulas e das atividades realizadas obtiveram desenvolvimento melhor do que o do teste diagnóstico, nas habilidades dos conceitos matemáticos no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações. Desse modo, seis alunos alcançaram, nesta fase, um nível correto na realização da solução do modelo matemático, enquanto outros três apresentaram a execução de maneira incorreta.

Observou-se, na quarta ação, que três estudantes atingiram um nível acima da média alcançando um nível correto e seis alunos ficaram abaixo da média realizando a ação de forma razoavelmente correta. A terceira e quarta ações do teste formativo, quando comparadas com a terceira e quarta ação do teste diagnóstico, pode-se dizer que houve uma melhora expressiva quanto ao desempenho destas ações no conteúdo de derivadas de varias variáveis.

Na análise, relacionando a terceira ação (solucionar o modelo) com a quarta ação (interpretar a solução), os estudantes A-04 e A-06 obtiveram um pequeno aumento na média da quarta ação em relação a terceira ação da prova formativa, o A-07 permaneceu com a mesma média e os demais, apesar de se encontrarem abaixo da média, não podemos afirmar que não

houve desempenho, pois trata-se de ações diferentes que envolvem problemas que apresentam complexidade no conteúdo de derivadas parciais.

3.2.3 Desempenho da Assimilação da Avaliação Final em Derivadas Parciais

Na fase referente à avaliação final, os problemas executados pelos estudantes no conteúdo de derivadas parciais foram analisados de acordo com sua aplicação na área da economia, medicina e produção. As análises do desempenho qualitativo e quantitativo alcançado pelos estudantes na fase final encontram-se demonstradas no (Apêndice H). De acordo com a ordem pela qual os problemas foram analisados, percebe-se que todos os estudantes estiveram presentes na aplicação do teste final.

Conforme descrito na análise do teste formativo, neste momento da investigação sobre os problemas analisados, a atenção também foi voltada às características das ações essenciais. No problema (P-01), buscaram-se apresentar os conceitos iniciais de funções de várias variáveis, analisou-se a habilidade do estudante na transferência da ação mental para si, quanto aos procedimentos necessários para resolver a derivada parcial de acordo com as ações. O resultado foi explicitado a partir da substituição dos valores das variáveis na função exposta no problema, de forma a resolver o modelo. Desse modo, a ação essencial do referido problema foi solucionar o modelo matemático.

Problema 01: Uma população que cresce exponencialmente satisfaz a equação $P(A, K, t) = Ae^{kt}$, onde P é a população no instante t , A é a população inicial (para $t = 0$) e K é a taxa de crescimento relativa (per capita). A população de um certo país é atualmente de 5 milhões de habitantes e está crescendo à taxa de 3% ao ano. Qual será a população daqui a 7 anos?

No problema (P-02) apresentou-se o conceito de derivadas parciais aplicado à demanda de produto, pertencente à área da economia, a qual se analisaram as habilidades desenvolvidas pelo estudante na realização dos cálculos e sua descrição do resultado encontrado. Assim sendo, a ação essencial em destaque é a interpretação da solução, sendo necessário para melhor compreensão conhecer o significado de demanda e preço unitário em termos econômicos.

Problema 02: Suponhamos que a quantidade de batata demandada por semana (em kg) num supermercado seja função do seu preço unitário x (por kg) e do preço unitário de arroz y (por kg), segundo a relação $q = f(x, y) = 1000 - 2x^2 + 15y$. Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40)$. Justifique sua resposta.

O problema (P-03) se referia ao cálculo da derivada parcial de três variáveis, em que se requeria do estudante realizar o processo de derivação na função dada no problema de forma a demonstrar a expressão da taxa de variação da vazão de sangue com a pressão no capilar, descrevendo se a taxa seria crescente ou decrescente. Tem-se como ação essencial interpretar a solução do modelo matemático este é um problema aplicado a área da medicina.

Problema 03: CIRCULAÇÃO DO SANGUE: A passagem de sangue de uma artéria para um capilar é dada pela expressão $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y - z} \text{ cm}^3/\text{s}$ onde c é uma constante positiva, x é o diâmetro do capilar, y é a pressão na artéria e z é a pressão no capilar. Qual é a expressão da taxa de variação da vazão de sangue com a pressão no capilar, supondo que a pressão na artéria e o diâmetro do capilar permanecem constantes? A taxa é crescente ou decrescente?

O problema (P-04) encontrava-se embasado no conteúdo de derivadas parciais de ordem superior, em que se fazia necessário calcular a segunda derivada e após explicar em termos econômicos seu significado. Este problema pertence à área da produção, a ação essencial em destaque é a interpretação da solução.

Problema 04: PRODUTIVIDADE MARGINAL: Em uma certa fábrica, a produção é $Q = 120k^{1/2}L^{1/3}$, unidades, onde k é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume da mão de obra em homens-horas.

- Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial L^2$ e explique o que significa em termos econômicos.
- Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial K^2$ e explique o que significa em termos econômicos.

A demonstração qualitativa do desempenho das ações dos estudantes (A-01 a A-09) de acordo com os indicadores quantitativos encontra-se no (Apêndice E), a qual faz menção às soluções resolvidas pelos estudantes nos quatro problemas escolhidos para análise.

Nesta fase as atividades desenvolvidas foram distribuídas nos assuntos de todo o semestre, em que os estudantes resolveram o teste final contendo 10 problemas e puderam utilizar material de apoio para realizar os procedimentos necessários na resolução dos problemas contextualizados que apresentavam certa complexidade quanto mais se estendia às aplicações de derivadas parciais.

Dentre os problemas propostos encontravam-se os seguintes assuntos: funções de várias variáveis, limite e continuidade, derivada parcial, derivada de ordem superior, aproximação linear, diferencial total, regra da cadeia, derivada direcional e vetor gradiente e máximo e mínimo. No entanto, foram escolhidos para serem analisados apenas quatro problemas que apresentavam o conteúdo específico escolhido na pesquisa, derivadas parciais e suas aplicações.

O resultado quantitativo da análise, encontra-se destacado por uma escala de 1 até 5 pontos de acordo com os indicadores essenciais. Desse modo, a (Tabela 11) apresenta o resultado quantitativo do desempenho dos estudantes nos problemas na Avaliação Final.

Tabela 11 - Resultado da Avaliação Final

ALUNO	P09			P10			P11				P12		
	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	3ªA	4ªA
A01	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A02	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A03	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A04	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A05	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A06	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A07	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A08	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
A09	5	5	5	1	5	1	1	1	5	5	1	5	2
Media	5,0	5,0	5,0	1,0	5,0	1,0	1,0	1,0	5,0	5,0	1,0	5,0	2,0
Desvio Padrão	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Mediana	5,0	5,0	5,0	1,0	5,0	1,0	1,0	1,0	5,0	5,0	1,0	5,0	2,0

Os estudantes, de modo geral, no que se refere ao problema (P-01) não detalharam os conceitos descrevendo os dados e as condições do problema. Porém, subentende-se que os alunos tenham compreendido o problema uma vez que seu enunciado apresentava-se em fácil compreensão. Destacaram as variáveis A, K e t pertencentes a construção do modelo e explicitaram o modelo matemático do problema, realizaram cálculo de transformação da porcentagem para executarem a função dada. Realizaram os cálculos inserindo as variáveis em seus respectivos lugares na equação $P(A, K, t) = Ae^{kt}$ solucionando o modelo corretamente e consequentemente deram resposta ao objetivo do problema com êxito descrevendo que a população do país daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 390,3 habitantes. Desse modo, os estudantes, obtiveram um desempenho de suas habilidades em funções de várias variáveis em nível totalmente correto, executaram a ação essencial solucionar o modelo com êxito.

Na execução do problema (P-02) os estudantes deixaram de extrair os diferentes conceitos como demanda e preço unitário o qual formavam parte do enunciado, não descreveram as condições, nem o objetivo do problema que não estava tão explícito para compreensão. Os alunos deixaram de expor as variáveis, porém o modelo matemático necessário para dar a resposta havia sido dado. Realizaram os cálculos corretamente fazendo

uso da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais, após substituíram os valores do preço unitário da batata x e do arroz y na função já derivada, encontrando assim a demanda em relação ao preço da batata e o preço do arroz. Porém justifica sua resposta incorretamente por meio de tentativa de ensaio e erro, o problema em questão é uma aplicação da derivada parcial na área da economia. Portanto, o desenvolvimento das ações ocorreu de forma razoavelmente correta, pois a ação essencial interpretar a solução foi pouco satisfatória.

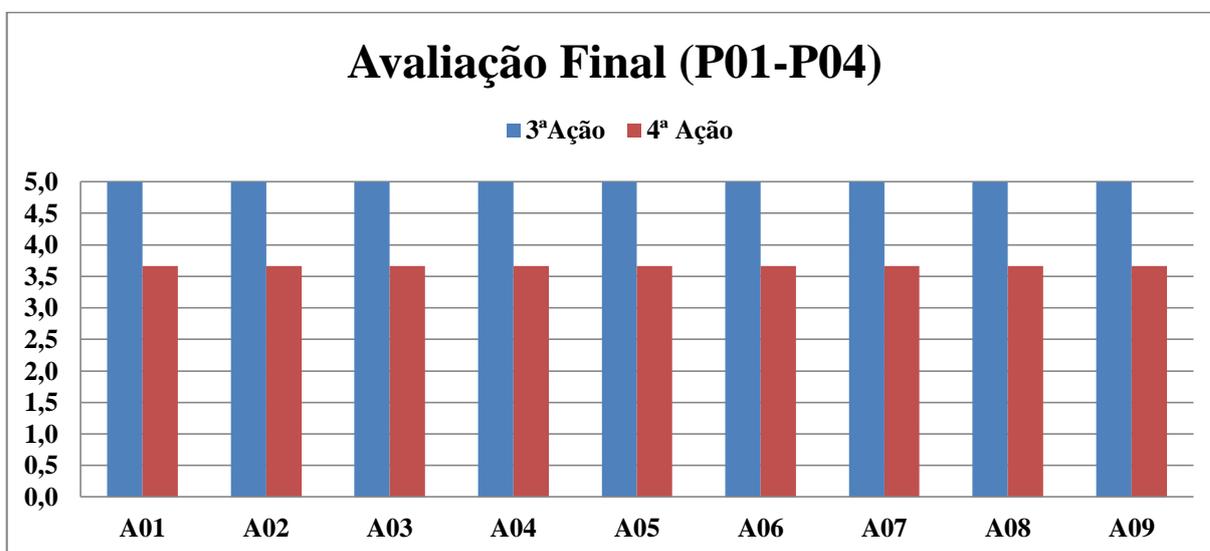
O problema (P-03) faz parte do assunto de derivadas parciais com aplicação na medicina, por apresentar elementos com significados desconhecidos geralmente para quem não pertence a esta área, por isso, para melhor compreender o problema, um dos fatores a ser considerado seria apresentar os conceitos de artéria, capilar, diâmetro do capilar, pressão na artéria, pressão no capilar e vazão do sangue, entretanto, os estudantes não extraíram esses termos desconhecidos, como também as condições do problema e seu objetivo, ressalta-se que as condições e o objetivo estavam expostos no mesmo. As variáveis x, y, z , bem como o modelo matemático $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y - z} \text{ cm}^3/\text{s}$, não foram detalhados pelos alunos, no entanto a composição do problema permitia chegar a uma resolução satisfatória. Deduz-se que tenham compreendido o problema implicitamente conforme já explicado nesta análise. Executaram os cálculos corretamente por meio da regra de derivação adequada e do conceito de derivadas parciais com várias variáveis solucionando assim o modelo. Desenvolveram a ação essencial interpretar a solução satisfatoriamente, ao apresentar a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, afirmando que a taxa é decrescente, levando a perceber que suas habilidades neste momento foram totalmente corretas.

De acordo com o contexto do problema (P-04) este apresenta a produção de certa fábrica, trata-se da derivada de ordem superior aplicada à produtividade marginal. Os estudantes não determinaram as condições do problema e seu objetivo, mas estes encontravam-se explícitos no problema. Referindo-se à construção do modelo matemática, todas as informações necessárias a respeito das variáveis e do modelo foram dadas. Possibilitando assim que a solução do modelo fosse resolvida corretamente por meio do cálculo da segunda derivada e da regra da potência, no entanto, dão resposta ao objetivo do problema de maneira parcial. Assim sendo, os procedimentos do desempenho dos estudantes necessários a resolução ocorreram de maneira correta.

Sintetiza-se o desempenho dos alunos quanto a terceira ação (solucionar o problema) e quarta ação (interpretar a solução), sendo consideradas, nesta fase final de aplicação, como ações essenciais para demonstrar as habilidades dos estudantes quanto ao conceito de derivadas

parciais e suas aplicações. O (Gráfico 5), demonstra a média alcançada pelos estudantes, do desempenho no desenvolvimento da 3ª ação e 4ª ação dos problemas (P-01 a P-04) do teste final.

Gráfico 5 – Média de Desempenho da Terceira e Quarta Ação da Avaliação Final



No desempenho do teste final, na terceira ação todos os estudantes alcançaram um nível satisfatório quanto à solução do modelo matemático, obtiveram um desempenho acima da média, atingindo assim na escala de [1-5] das ações essenciais o grau elevado, estabelecido nesta escala para a análise dos problemas matemáticos no quantitativo.

De acordo com os dados exposto no (Gráfico 5), os estudantes alcançaram um desenvolvimento satisfatório, todos os alunos atingiram um desempenho acima da média, na interpretação da solução.

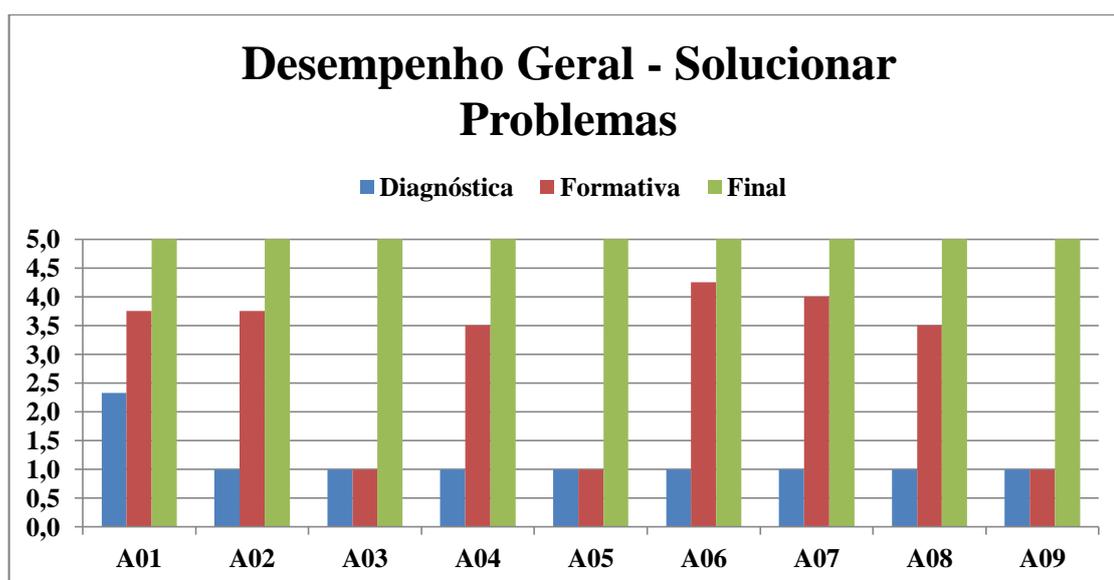
Portanto, demonstraram que o seu conhecimento na solução do modelo no assunto de derivadas e suas diversas aplicações foi significativa e realizadas de forma totalmente correta. No entanto, para a quarta ação pode-se dizer que o resultado dos estudantes nesta fase ocorreu de maneira correta, houve avanço na interpretação do problema quando comparado com o teste diagnóstico e formativo, mesmo que os estudantes não tenham chegado ao resultado máximo das ações essenciais no que se refere a interpretação.

De modo geral, as atividades realizadas pelos estudantes contribuíram para sua compreensão na execução de cada ação de forma progressiva até o teste final. Subentende-se que o conhecimento dos estudantes deu-se de maneira positiva em relação ao conteúdo

matemático de derivadas de função de uma variável até o último assunto de derivadas de várias variáveis as quais foram aplicadas nesta análise.

Apresenta-se a média geral do desempenho dos estudantes na terceira ação (solucionar o modelo) dos problemas nas três fases de aplicação dos testes, de forma a evidenciar as habilidades dos alunos no conteúdo derivadas de funções de uma variável e de derivadas parciais e suas aplicações. Conforme o (Gráfico 6) em relação a 3ª ação nos problemas (P-01 a P-04) dos testes.

Gráfico 6 – Média de Desempenho Geral da Terceira Ação nas Três Avaliações



Na análise do desempenho geral, o estudante (A-01), comparando os três testes, diagnóstico, formativo e final houve um considerável avanço, pois estava abaixo da média na primeira prova e a partir da segunda avaliação ficou acima da média chegando a atingir o nível máximo na escala das ações essenciais. No início das aulas, não demonstrava conhecimento de todas as regras de derivação, mas ao final havia feito uso de todas as regras por meio de testes e atividades.

Observa-se que os alunos (A-02, A-04 e A-08) atingiram um desempenho parecido na média geral, na prova diagnóstica apresentaram um baixo desempenho, o que pode ter ocorrido por insuficiência de conhecimento das regras de derivação ou a não familiaridade na resolução de problemas matemáticos ou a ausência nas aulas práticas e avaliações. A partir das aulas referentes ao teste formativo e final suas participações foram mais expressivas levando-os a ultrapassar a média.

Os estudantes (A-03, A-05 e A-09), no desempenho geral da avaliação diagnóstica e formativa, apresentam conforme os dados do gráfico, insuficiência quanto ao conhecimento do conteúdo de derivadas. Porém, os estudantes (A-03 e A-05), apesar de comparecer ao primeiro teste, não houve resposta significativa em suas avaliações. O aluno (A-09) faltou a primeira avaliação, todos estes estudantes faltaram no teste 2, conseqüentemente houve insuficiência de dados a ser analisado nestas duas primeiras fases. No entanto, como estes participavam das outras aulas presenciais, estudo de grupo, videoconferência e tinham o material para estudo disponível no ambiente virtual de aprendizagem, isto pode ter levado a alcançar um resultado acima da média na última avaliação a qual estes compareceram.

Na análise do desempenho geral dos alunos (A-06 e A-07), na primeira prova suas respostas não foram tão expressivas, de forma que o desenvolvimento dos problemas não foram completos e corretos, acarretando assim baixo desempenho nesta fase. Entretanto demonstraram avanço significativo nos resultados da avaliação formativa e final, em relação ao assunto de derivadas parciais e suas aplicações em diversas áreas.

Portanto, no desempenho da média geral, os estudantes obtiveram um avanço considerável, chegando a um nível totalmente correto na execução da terceira ação nos problemas de derivadas de funções de várias variáveis.

3.3 DESCRIÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS EM DERIVADAS PARCIAIS

As etapas por ações mentais como composição do processo em estudo, estiveram presentes em todo o desenvolvimento do conteúdo de derivadas na disciplina de cálculo III da licenciatura em matemática a distância.

3.3.1 Base Orientadora da Ação

Quadro 16 – Base Orientadora da Ação em Derivadas Parciais

BASE ORIENTADORA DA AÇÃO			
nº	Características Generalizada dos Conceitos	Características Plena (Completa)	Características do Modo de Obtenção (Preparada)
1	Taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece fixa.	Apresentar o estudo da derivada parcial por meio de resolução de problema aplicados a variáveis áreas das ciências, mostrando seu conceito de acordo com a definição formal e as regras de derivação: Em que a derivada parcial em relação a x , é dada por	•Aplicar o conceito de orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções

	Interpretação geométrica de derivadas parciais de uma função de duas variáveis.	$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, e a derivada parcial em relação a y , é dada por $f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$. Saber interpretar na forma geométrica uma função de duas variáveis.	de duas variáveis (Etapa de formação da BOA) •Desenvolver as ações da ASP em derivadas parciais para solucionar o modelo e interpretar a solução do modelo matemático vinculadas com o objetivo do problema.
2	Derivadas Parciais	Explicar o por meio do método da ASP a resolução de problemas aplicando o conceito de limite quociente diferença e interpreta-los geometricamente. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário.	O estudante deve praticar (etapa mental) minuciosamente o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. Os estudantes devem assimilar as ações na forma consciente, compartilhadas, detalhada e não generalizada.
3	Análise Marginal	Conduzir de acordo com o método da ASP a aplicação da regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário.	
4	Análise Marginal	Direcionar por meio do método da ASP a utilização da regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema.	O estudante deve explicar (etapa verbal) o sistema de ações sem ajuda de objetos externos. As ações são consciente, compartilhadas, detalhadas e as operações são automatizadas.
5	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Expor por meio do método da ASP a aplicação da definição da Regra Cadeia $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ para funções de duas variáveis na resolução de problema.	Aplicar o conceito de orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções de duas variáveis. Desenvolver as ações da ASP em derivadas parciais para solucionar o modelo e interpretar a solução do modelo matemático vinculadas com o objetivo do problema.
6	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Orientar de acordo com o método da ASP o emprego da regra da cadeia e aplicações na resolução de problema.	O estudante deve utilizar o sistema da ASP em derivadas parciais e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas.
7		Direcionar a partir do método da ASP o estudo da diferenciabilidade de uma função de duas variáveis $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ Através da atividade de situações problema.	Desenvolver a aplicação da orientação do sistema de ações da ASP em diferenciabilidade a partir de problemas de funções de duas variáveis. Descrever a solução do modelo e interpretação da solução que estão

			vinculadas com o objetivo do problema.
8		Expor a partir do método da ASP a resolução de problemas de diferenciabilidade e suas aplicações.	O estudante deve fazer uso do sistema de ações da ASP em diferencial e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas.
Legenda: AT: Aula teórica, AP: Aula Prática.			

De acordo com o plano elaborado para a aplicação do conteúdo, executou-se a base orientadora da ação. Como o assunto específico da pesquisa foi derivadas parciais e o primeiro assunto a ser estudado foi funções de várias variáveis que é desenvolvido por meio da derivada e suas regras e definição. Na primeira quinzena do semestre, enquanto se estava abordando este assunto pelo professor da disciplina, a pesquisadora elaborou quatro problemas contextualizados envolvendo funções de várias variáveis utilizados na meteorologia, produção e engenharia da produção (cilindro) como forma dos estudantes se familiarizarem com o estudo da matemática através de problemas, e eles ganhariam bônus ao resolver. Os quais foi disponibilizado aos estudantes por meio do ambiente virtual de aprendizagem para resolverem e enviarem em anexo ao ambiente em prazo determinado. Porém, a participação dos estudantes quanto a esta atividade foi pouco satisfatória uma vez que somente um aluno a realizou e de maneira parcial. Os outros só enviaram esta atividade próximo do término do semestre.

Por conseguinte houve a videoconferência na qual o professor apresentou o tema de todos os conteúdos que seriam estudados e explicou o assunto de funções de várias variáveis e limite de funções de várias variáveis muito bem e apresentava ilustrações nos slides e resolução de exemplos na câmera documento. Durante a aula, os estudantes estavam atentos e perguntavam quando tinham dúvida na explicação e o professor respondia às suas perguntas de maneira recíproca.

O conteúdo dos assuntos era disponibilizado no ambiente em slides, livro-texto da disciplina e matérias complementares. O conteúdo de derivadas parciais foi iniciado pelo professor na terceira quinzena, quando foi apresentado aos estudantes no ambiente virtual em forma de slide. Próximo ao final desta quinzena, houve a segunda videoconferência em que o professor da turma apresentou questões de revisão para a prova, mostrando sua resolução através da câmera documento, os alunos interagem perguntando e expondo também questões dos assuntos estudados em que tinham dúvida. O professor, em suas aulas, demonstrava ter total domínio do conteúdo e sabia explicar.

Para apresentar o conteúdo de derivadas parciais aos alunos por meio de problemas a pesquisadora realizou uma aula de no Polo de Alto Alegre utilizando uma lista de exercício o qual o professor havia passado como atividade para os alunos, nesta lista haviam três questões de derivadas parciais, sendo que o último era um problema envolvendo a inclinação reta tangente. Na aula, houve explicação das questões, os estudantes estavam atentos, faziam perguntas e respondiam às questões em conjunto com a pesquisadora, pois já haviam respondido algumas das questões da atividade antes da realização da aula. E algumas tinham dúvida se estava correta e pediram que explicasse; se referiam a quarta questão que tratava de Cauchy-Riemann e quinta que se referia à equação da reta tangente. Demonstravam ter conhecimento do assunto e perguntavam e ajudavam a chegar ao resultado final das questões que tinham dúvida. Por fim, apresentou-se a explicação de dois problemas envolvendo derivadas parciais de acordo com o plano de aula elaboradora para execução do estudo da taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece fixa, interpretação geométrica de derivadas parciais de uma função de duas variáveis, fazendo uso das quatro ações da ASP na resolução do problema, por meio da definição formal. O segundo problema envolvia a função de Cobb-Douglas, uma aplicação da derivada, o qual ocorreu o uso das regras de derivação e do conceito de derivadas parciais. Esclareceu-se sobre o que seria a Atividade de Situações Problema, os estudantes disseram que já haviam lido sobre Polya em dois artigos estudados em disciplinas anteriores, ou seja, tinham um pouco de conhecimento sobre resolução de problema.

Até o início da quarta quinzena os estudantes tiveram que realizar três atividades obrigatórias as quais enviam sua resposta pelo AVA; as atividades eram referentes ao assunto: funções de várias variáveis, limite de funções de várias variáveis e funções contínuas, derivadas parciais e inclinação da reta tangente.

Na quinta quinzena, foi marcada a avaliação formativa com os estudantes no Polo de Alto Alegre, mas, ao início da aula, estes disseram que não estavam preparados para realizar a prova, que já havia mudado a data duas vezes devido a modificações no calendário acadêmico.

Então, como segundo plano, houve a orientação, dando aula de revisão, durante a qual foram resolvidas as questões da prova no quadro branco, fazendo do método da ASP nos problemas, durante a aula estes interagiam pois respondiam às perguntas e resolviam os cálculos.

Nesta quinta quinzena também ocorreu a terceira videoconferência em que o professor da disciplina explicou sobre derivadas de ordem superior, plano tangente, aproximações lineares e diferencial total. O professor explicou apresentando um exemplo do capacete e do

caderno andando sobre a superfície. Os alunos participaram perguntando e tirando dúvidas durante a aula. Nesta ocasião também os estudantes tiveram que responder a atividades obrigatórias individualmente as quais enviam ao ambiente; nesta atividade havia três problemas em que dois eram sobre aproximação linear e um de diferencial total, que deveriam ser respondidos seguindo o passo a passo da ASP; foram elaborados pela pesquisadora e colocados no AVA pelo professor em seu respectivo slide do conteúdo e explicado pelo professor da disciplina na terceira videoconferência.

No início da sexta quinzena, foi aplicado o teste formativo para os estudantes no Polo de Alto Alegre, no assunto de derivadas parciais e suas aplicações, em que estes corresponderam positivamente. Os assuntos tratados nesta quinzena foram: regra da cadeia, derivação implícita, derivada direcional e vetor gradiente, todos apresentados aos estudantes em slide no AVA o qual continham um problema utilizando a regra da cadeia e um de derivada direcional e vetor gradiente desenvolvidos com as ações da ASP. Os estudantes realizaram a resolução da atividade obrigatória, dentre as quatro questões da atividade havia um problema matemático referente à derivada direcional e vetor gradiente; a atividade foi respondida seguindo as ações da ASP.

Na oitava quinzena, foi realizada uma prova de máximo e mínimo com funções de uma variável com os estudantes, pois neste momento iniciaria o assunto de máximo e mínimo de uma função, porém, nesta avaliação, as respostas não foram bem satisfatórias. Os estudantes desenvolveram também neste período as atividades contendo este conteúdo em dois problemas, nos quais foram explicitados exemplos em slide no AVA contendo um problema de máximo e mínimo.

Na metade da oitava quinzena houve, ocorreu a quarta videoconferência em que o professor fez uma revisão geral do assunto da última prova e explicou também como ocorreria a prova final só com problemas matemáticos contendo todo o assunto do semestre. Os estudantes participaram interagindo na videoconferência. Realizaram uma prova feita pelo professor, e uma avaliação final de todo o assunto com consulta, desenvolvido pela pesquisadora com o auxílio do professor da disciplina, com o intuito de verificar o conhecimento desenvolvido pelos estudantes durante o semestre, dentre as quais oito se referiam ao assunto de derivadas parciais e suas aplicações.

3.3.2 Formação da Ação Materializada

Como objeto da etapa material tem-se os problemas que envolviam o conceito essencial de derivadas parciais e suas aplicações, de forma a detalhar; tudo foi exemplificado aos estudantes por meio de slides elaborados com o conteúdo e disponibilizados no ambiente virtual de aprendizagem e explicados em videoconferência e aula de tira-dúvidas.

De acordo com a forma materializada que expressa a assimilação dos conceitos e as informações fundamentais a serem desenvolvidas em derivadas parciais, por meio da base orientadora da ação, a qual foi apresentada por meio da resolução dos problemas prévios de derivadas de funções de uma variável, visando no decorrer das aulas à resolução problemas.

O ensino encontrou-se apoiado nos procedimentos detalhados em operações de resolução de problemas, envolvendo conceito de derivadas parciais de acordo com a definição formal e suas regras, que constituem o sistema de ações desenvolvidas pelos estudantes, almejando adquirir habilidades práticas na aplicação dos conceitos na sua forma reduzida.

Portanto, a assimilação dos conceitos foi desenvolvida por meio da solução de problemas utilizando o passo a passo da ASP com ênfase na quarta ação (interpretação da solução). De modo que o estudante, dispondo do conhecimento das regras de derivação e do conceito essencial de derivada parcial, aplica estes conceitos para assimilar os assuntos “derivadas de ordem superior prosseguindo com plano tangente, após estes se inseriu a aproximação linear e diferencial, dando seguimento, a regra da cadeia, derivação implícita, adentrando em derivada direcional e vetor gradiente e ao final máximo e mínimo de uma função”, de maneira que levou o aluno automaticamente a associar os conceitos aprendidos na obtenção dos novos, e se apoiar corretamente nas aplicações para solucionar problemas e explicar a solução, com auxílio orientado na BOA. E por meio dos resultados das atividades práticas de lápis e papel se obtém as explicações descritivas dos alunos.

Por fim, nos problemas 1- 4 (final), foram solicitados como resposta o uso do conceito de funções de varias variáveis, derivada parcial e derivada de ordem superior, identificando as variáveis existentes no problema, bem como determinar quais delas seriam necessário realizar o processo de derivação. De modo que o estudante deveria saber diferenciar os conceitos apresentados por meio de problemas derivando a função f de duas variáveis, x e y , em relação a x , permanecendo a variável y constante, denotada por $f_x(x, y)$, se o limite existir. Do mesmo modo, derivar f em relação a y , permanecendo a variável x constante, denotada por $f_y(x, y)$, se o limite existir, executando-os conforme o solicitado descrevendo a definição formal de derivada parcial, como também partindo do problema, chegando ao resultado por meio do

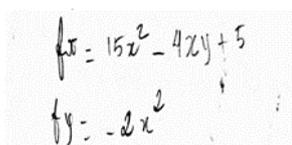
conceito de derivadas parciais e das técnicas de derivação utilizada em diferentes contextos de problemas matemáticos.

3.3.3 Formação da Ação Verbal Externa

A ação verbal externa apresentou-se na pesquisa em forma de um pequeno fragmento uma vez que esta investigação ocorreu com estudantes da educação a distância, em que as atividades executadas pelos estudantes naturalmente acontecem sem a presença do professor. No entanto, pode-se destacar o desenvolvimento das habilidades dos alunos na resolução das atividades propostas na fase formativa de maneira escrita. Desse modo, neste momento, os estudantes iniciaram o processo de organização mental do conceito de derivadas parciais e suas aplicações que se encontram em formação pelos mesmos, por meio das atividades, como forma de saber aplicar os conceitos do assunto em questão, bem como solucionar o modelo matemático e interpretar a solução nos problemas.

Conforme resultado da solução dada pelo estudante (A-01), no problema (P-01) nesta fase, houve melhora quando comparado com o momento dos conhecimentos prévios, suas ideias quanto à utilização dos conceitos necessários para a resolução se encontravam na maneira totalmente correta, pois as explicações do assunto em slide e a aula presencial realizada podem tê-lo levado a esta percepção. Referente às ações mentais, estas se encontravam satisfatórias quando se trata da execução do conceito de derivadas parciais e a utilização da regra da potência, apesar desta fase se caracteriza como início da organização mental do aluno.

Ilustração 1 – Representação do Modelo



The image shows two handwritten mathematical equations. The first equation is $f_x = 15x^2 - 4xy + 5$ and the second equation is $f_y = -2x^2$. The handwriting is in black ink on a light background.

Os estudantes (A-02, A-04 e A-08) também aplicaram seus conhecimentos de maneira totalmente correta, fazer uso corretamente dos conceitos essenciais de derivadas parciais dando solução ao modelo matemático, demonstrando isto por escrito. No entanto, os estudantes (A-06 e A-07), na aplicação dos conceitos essenciais, obtiveram um rendimento parcialmente satisfatório na resolução.

Na síntese do problema (P-02), o estudante demonstrou a realização da resolução das ações de maneira razoavelmente correta, o que impossibilitou que interpretasse a solução do modelo matemático, que era a ação essencial. Apesar do contexto do problema não ser comum no estudo do cálculo para a área específica da matemática, o seu modelo segue o mesmo padrão do problema (A-01), porém seu enunciado desconhecido pode tê-lo levado a não assimilar corretamente as ideias.

O estudante (A-02), no problema (P-02), executou sua resolução em nível incorreto, uma vez que os procedimentos necessários para se chegar a descrever a ação essencial interpretar a solução não foram realizados corretamente na variável de destaque no problema. O que demonstrou que sua percepção não estava nítida quanto à execução das ações deixando assim de evidenciar a estimativa da variação do peso da criança.

O estudante (A-04) solucionou o problema (P-02) em nível incorreto, pois não fez uso de nenhuma propriedade essencial de derivadas parciais na resolução do modelo, apenas fez uso de tentativa de ensaio e erro, mesmo tendo feito procedimentos corretos no problema anterior que eram parecidos com o que teria que usar neste problema.

Conforme analisado, o estudante (A-06) resolveu em nível totalmente correto o problema (P-02), pois identificou as propriedades essenciais do assunto, mesmo que sua organização mental estivesse em processo de desenvolvimento. O aluno (A-07) no problema (P-02) apresentou solução de maneira razoavelmente correta, porém, realizou cálculos corretamente com os métodos adequados, mas também resolveu cálculos por meio de tentativa de ensaio e erro incorretamente, realizou a ação essencial interpretar a solução incorretamente por tentativa de ensaio e erro, o que demonstrou que suas ideias estavam em formação, mas não estão bem desenvolvidas.

O estudante (A-08) resolveu o problema (P-02) em nível incorreto, o que significa que sua organização mental ainda estava sendo processada para o conceito de derivadas parciais e suas aplicações, pois não realizou todos os cálculos matemáticos corretamente por meio das regras de derivação e do conceito de derivadas parciais, fez uso por tentativa de ensaio e erro, não interpretou a solução que era a ação essencial.

3.3.4 Formação da Ação em Linguagem Externa para si

Nesta fase, apresentaram-se os problemas (P-03 e P-04) como forma de mostrar o desempenho dos estudantes por meio da análise dos problemas na forma externa para si juntamente com as ações.

Esta etapa tem como destaque que, nos procedimentos realizados, o estudante teria que internalizar as aplicações de derivação parcial como novo conhecimento que, se referindo ao contexto deste estudo na educação a distância, foi observado verbalmente por meio da aula presencial de tira-dúvidas e descritiva de acordo com a resolução das provas de lápis e papel formativa dos alunos, assim são encontrados os conceitos essenciais da derivação que acrescentados a outras propriedades necessárias do novo conhecimento, se transformam em habilidades específicas do estudante, o qual, por meio dos conceitos adquiridos, sabe realizar a execução em novas situações problema.

O estudante (A-01), conforme resposta do problema (P-03), apresentou solução em nível totalmente correta, pois descreveu a ação essencial (interpretar a solução) corretamente, ao dar resposta ao objetivo do problema, sendo ao solucionar o modelo com a utilização dos conceitos essenciais de derivada parcial e as regras adequadas, foram um ponto chave para se chegar à interpretação do problema com êxito. Assim descreveu sua interpretação de acordo com definição e as regras

O estudante extrai os resultados significativos. Desse modo dar resposta ao objetivo do problema dizendo que *“para aumentar rapidamente a produtividade o fabricante deve aumentar a mão de obra”*.

No processo de resolução do (P-04) do estudante (A-01), as ações realizadas ocorreram em nível razoavelmente correto, pois o desenvolvimento da ação essencial (interpretar a solução), foi incompleta e incorreta. Leva-se a deduzir, por meio da análise, que os conceitos os quais já deveriam estar formados e realizados no processo ainda não estavam bem formados, mesmo que o estudante tenha feito uso da regra da potência e da constante, bem como do conceito de derivadas parciais construindo um modelo matemático em relação à variável x e y , pois deixou de realizar o cálculo de estimativa da produção. Sua percepção quanto à substituição de valores das variáveis na função encontrada ainda não estavam organizados, pois, quando necessita usar o jogo de sinal da multiplicação no cálculo da derivada, não o executa.

O estudante (A-02) resolveu o problema (P-03) de forma incorreta quanto ao fato de que sua resposta ao objetivo do problema; quanto à execução das ações demonstraram que este ainda não havia internalizado totalmente a organização mental dos conceitos da definição de

derivadas parciais, pois sua interpretação foi incorreta, uma vez que se percebeu que cometeu um pequeno erro ao desenvolver os cálculos, por isso, mesmo fazendo uso das regras adequadas e do conceito de derivadas parciais, obteve um resultado incorreto do problema.

Na observação dos dados do estudante (A-02) no problema (P-04), percebe-se que a resolução ocorreu em nível correto e sua interpretação foi parcialmente correta, pois, ao desenvolver suas habilidades formadas, chega a realizar cálculos não solicitados no problema, que ao final contribuiu para que sua interpretação da variável x estivesse incorreta, ou seja, apresentou resultado estimando assim a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado, porém a descreveu em relação a y em vez de x .

O estudante (A-04), no desempenho do problema (P-03), melhorou quanto ao desenvolvimento da resolução do problema bem como sua interpretação. Suas ideias conceituais de derivadas parciais nos procedimentos necessários e inclusão dos novos conceitos se desenvolveram em nível correto, visto que, ao realizou os cálculos de maneira parcialmente correta, demonstrou ter compreendido os conceitos essenciais de derivada parcial, não percebeu que havia trocado o sinal do expoente de negativo para positivo chegando assim em um resultado incorreto em L . No entanto, as ideias obtidas foram suficientes para justificar sua resposta, em que descreveu:

É preciso aumentar mão-de-obra para aumentar a produção.

No problema (P-04), para o estudante (A-04), observou-se que suas ideias no assunto de derivadas parciais e suas aplicações foram instituídas na forma correta. Realizou os procedimentos necessários destacando a estimativa da variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado, interpretando assim a solução do problema de forma satisfatória. Na solução do modelo, se expressou além do solicitado derivando em relação a y .

O estudante (A-06), no problema (P-03), desenvolveu as ações em nível totalmente correto, descrevendo assim a interpretação da solução com êxito. Entretanto, foi através da solução do modelo, por meio do uso correto dos conceitos essenciais de derivadas parciais formados pelo estudante, que este alcançou o objetivo do problema. Evidenciou a interpretação afirmando:

“que se faz necessário aumentar a mão de obra, pois a mesma é maior que o investimento, obtendo assim um aumento na produção”.

No problema (P-04), demonstrou que suas habilidade de assimilação das ações ocorreu na forma correta, pois executou alguns cálculos de maneira parcialmente correta, também

desenvolve outros cálculos corretamente dando possibilidade à reformulação do problema, no entanto, interpretou a solução por meio de tentativa de ensaio e erro corretamente.

Conforme resumo da análise do estudante (A-07), foi observado no problema (P-03) que seu conhecimento se desenvolveu em nível totalmente correto, pois extraiu os dados significativos que o levaram a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta. A formação das ideias essenciais do assunto de derivadas, bem como suas regras contempladas com o novo conhecimento foram executadas pelo aluno de maneira satisfatória. Assim, evidenciou a solução do modelo em relação a K e L corretamente por meio do cálculo de derivadas parciais. Descreveu, a interpretação da solução do seguinte modo:

“para que isso ocorra o fabricante deve aumentar a mão de obra”.

No problema (P-04), as ideias dos procedimentos das ações pelo estudante (A-07) ocorreram na forma correta, pois sua interpretação foi correta, mas sua organização mental quanto aos conceitos e regras de derivação, nesta etapa, não se encontravam ainda totalmente internalizados, pois também realizou cálculos incorretos no processo de resolução, que foram corretos em relação à variável x e incorretos em relação à variável y , como a função em destaque do problema estava diretamente relacionada a variável x , obteve êxito na interpretação, realiza também cálculos não necessários em relação a y com erros.

De acordo com a síntese analisada do estudante (A-08) no problema (P-03), solucionou os procedimentos das ações de forma totalmente correta, pois suas habilidades quanto às ideias de aplicação da derivada parcial em conjunto com o novo conhecimento neste problema encontravam-se aguçadas. A solução do modelo matemático, realizado corretamente, bem como as substituições necessárias das variáveis foram cruciais para o êxito na interpretação. Desse modo, o estudante extrai os resultados significativos que o levam a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta, afirmando que:

“para aumentar a produção e ter mais lucro e produtividade na empresa o fabricante deve aumentar mais a mão de obra que é a mais produtiva até o momento rendendo mais”.

No problema (P-04) o estudante (A-08) desenvolveu o processo em nível incorreto, pois não interpretou a solução do modelo, tentou resolver a solução por tentativa de ensaio e erro. O resultado deste problema foi bastante diferente do que o estudante realizou no anterior, porém o fator tempo pode ter contribuído para esta divergência uma vez que os dois problemas tinham a mesma complexidade.

3.3.5 Formação da Ação em Linguagem Interna

Esta etapa se caracteriza pela sua abstração na qual se buscam desenvolver as habilidades de maneira mental, realizam-se as ações por meio do conhecimento cognitivo já adquirido do conceito de derivadas parciais e sua aplicação para dar solução ao modelo matemático e interpretar a solução, a sua automatização é fruto das etapas anteriores. Assim, os estudantes realizaram a linguagem interna por meio do teste final e das atividades.

Neste momento da pesquisa, participaram do teste final nove estudantes os quais realizaram a avaliação final com 10 questões dos assuntos de todo o semestre, na qual puderam realizar consulta para a resolução da prova de lápis e papel. Com isso pode-se dizer que o teste realizado não encontra-se profundamente enquadrado nas características da formação da ação em linguagem interna uma vez que a realização desta de acordo com os estudos sobre as etapas das ações mentais de Galperin, esta deve ser realizada sem nenhuma consulta, no entanto os problemas de acordo com a aplicação da derivada eram complexos e envolviam conceitos particulares e conceitos gerais para a aplicação das ideias conceituais de derivadas parciais, ou seja, apresentavam uma determinada dedicação para sua resolução correta. Porém quanto às ações da ASP pôde-se obter resultados mais precisos. Entre os 10 problemas foram escolhidos quatro problemas que foram analisados no aspecto da transferência da abstração das ações englobando a definição de derivada parcial sob a análise de derivada de ordem superior e regra da cadeia.

No problema (P-01), os estudantes de modo geral desenvolveram a ação essencial em nível totalmente correto, solucionaram o modelo, realizando os cálculos destacando as variáveis na equação $P(A, K, t) = Ae^{Kt}$. Demonstrando assim, sua compreensão quanto ao objetivo do problema, solução do modelo e interpretação da solução com base no conceito de funções de várias variáveis descrevendo: “A população do país daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 390,3 habitantes”.

Ilustração 2 – Representação do Modelo

A Fórmula de $P(A, K, t) = Ae^{Kt}$, em que:

A = População Inicial \Rightarrow 5 000 000.

K = Taxa de Crescimento \Rightarrow 3% = 0,03.

t = instante (tempo) \Rightarrow 7anos.

P = População \Rightarrow ?

Fazendo as devidas substituições e resolvendo na fórmula, temos.

$$\begin{aligned} P(A, K, t) &= Ae^{Kt} \\ &= 5\,000\,000 \cdot e^{(0,03 \cdot 7)} \\ &= 5\,000\,000 \cdot e^{0,21} \\ &\cong 6\,168\,390,3 \end{aligned}$$

Logo, a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 390,3 habitantes.

Conforme os processos desenvolvidos apoiados nas respostas, no uso do conceito derivadas parciais aplicado a economia, percebeu-se que os estudantes tinham o domínio das propriedades essenciais de forma a obter êxito na resolução do problema.

Na resolução do problema (P-02), os estudantes realizaram a ação essencial de maneira razoavelmente correta, implicando assim que sua compreensão quanto ao problema ocorreu de forma incompleta, uma vez que, apesar de ter executado os cálculos corretamente fazendo uso de conceitos particulares e gerais da derivada, interpretaram a solução do modelo incorretamente por meio de tentativa de ensaio e erro, sendo esta a ação essencial.

Desse modo, foi possível observar que os estudantes reconheciam as propriedades essenciais que o levaram ao resultado da solução do modelo, mas estas foram insuficientes para justificar a resposta do problema quanto aos conceitos de derivada parcial aplicado à economia.

Os estudantes, no problema (P-03), desenvolveram a ação essencial interpretar a solução em nível totalmente correto, apresentando assim evidências de que compreenderam corretamente o objetivo do problema, pois aplicaram corretamente o conceito de derivadas parciais na execução dos cálculos.

Ilustração 3 – Representação do Modelo

Da função $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y-z} \text{ cm}^3/\text{s}$, fazemos,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{C\pi x^2}{4} \cdot (-1) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y-z}} \cdot \text{cm}^3/\text{s}$$

$$= \frac{-C\pi x^2}{8\sqrt{y-z}} \text{ cm}^3/\text{s}$$

Fizemos y e z constantes, ou seja, pressão na artéria e diâmetro capilar respectivamente.

Observe que $\frac{\partial f}{\partial z} < 0$ para toda $F(x, y, z)$.

Logo a taxa é decrescente.

De acordo com os procedimentos realizados e o embasamento das respostas em relação ao conceito de derivadas parciais e sua aplicação na medicina, foi observado que os estudantes souberam identificar as propriedades essenciais de forma a alcançar um resultado satisfatório ao apresentar a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar.

No problema (P-04), os estudantes realizaram a ação essencial de maneira correta, descreveram a solução do modelo matemático, fazendo uso de conceitos particulares e gerais das ideias conceituais de derivada parcial e sua aplicação na produção, porém sua resposta ao objetivo do problema ocorreu de forma incompleta. Portanto, as ideias conceituais de derivadas parciais foram assimiladas, mas de maneira insuficiente para a interpretação da solução como ação essencial.

3.3.6 Análise da Assimilação do Conceito de Derivadas Parciais Fundamentada na Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais

Conforme o levantamento feito em decorrência do nível de partida quanto aos resultados do teste diagnóstico, foram obtidos os comparativos do desempenho qualitativo dos estudantes, referente ao conhecimento e a aplicação do conceito derivada de função de uma variável. Todavia, foi identificado que os estudantes, nas resoluções dos problemas, souberam aplicar os conceitos da derivada em questões com modelo tradicional. Porém, apresentaram dificuldades para resolver problemas contextualizados, mesmo estes contendo a construção do modelo matemático, bem como todos os demais dados necessários para interpretar a solução do modelo.

Consequentemente, com embasamento nas análises, pôde-se detectar que quase todos os estudantes apresentaram habilidades insuficientes quanto à transferência de conceito de derivada de função de uma variável, mesmo em problemas matemáticos com modelos elaborados. Sendo que este foi um elemento desafiador no desenvolvimento das aulas com vistas ao desempenho das habilidades dos estudantes na formação de conceitos essenciais para a resolução de problemas contextualizados.

No que se refere à fase formativa, as atividades realizadas englobaram a Base Orientadora da Ação, Materialização, ação verbal e linguagem externa para si. A qual permitiu que nos procedimentos da Atividade de Situações Problema em derivadas parciais e suas aplicações, os estudantes caminhassem pelas etapas qualitativas na transformação do conhecimento conforme o efeito (as características secundárias são o efeito das primárias) das características das ações.

No processo de assimilação do conteúdo de derivadas parciais, por meio da forma materializada das ações, foram destacadas os conceitos essenciais e as informações fundamentais de derivada de função de varias variáveis, bem como os conceitos particulares e gerais envolvidos, na resolução de problemas no decorrer das aulas presenciais e atividades propostas no ambiente virtual. E assim, tendo seu progresso de acordo com as características da Base orientadora (geral, completa e preparada). Com isso, se buscou a compreensão dos estudantes nas atividades propostas desenvolvidas a partir da BOA, no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações.

A etapa material teve sua abrangência na forma detalhada com os estudantes, na execução das operações da Atividade de Situações Problema. Assim, as ações foram elaboradas passo a passo por um sistema de ações na resolução dos problemas matemáticos, contendo os conceitos e propriedades essenciais de derivada parciais.

Neste momento, observou-se que os estudantes tiveram dificuldade para assimilar os conceitos quando estes não se encontravam em forma de questões tradicionais do cálculo, pois os problemas contextualizados, apesar de apresentarem o modelo pronto, continham palavras que eram desconhecidas pelos estudantes, além disso, o próprio conteúdo de derivadas parciais e os problemas pertencentes a este assunto eram novos para os estudantes.

Com o decorrer das aulas, os estudantes foram melhorando a assimilação dos conceitos fundamentais de derivadas parciais, sendo percebidos pela resolução dos problemas nas aulas práticas de lápis e papel e atividades descritas pelos estudantes no AVA. Foi observado que os estudantes aproveitavam a videoconferência para fazer perguntas para o professor no intuito de tirar suas dúvidas quanto ao assunto estudado, como os encontros presenciais eram poucos, essa era a principal oportunidade que eles tinham para perguntar do professor, que, sempre disposto, respondia às perguntas feitas pelos alunos.

Devido à modalidade do curso, os estudantes tinham o costume de estudar os assuntos da disciplina em grupo no Polo, o que pode ter contribuído para que em pequenos passos estes melhorassem suas habilidades quanto ao conhecimento dos conceitos envolvidos.

Sendo assim, durante o período percebeu-se que as ações foram desenvolvidas pelos alunos de maneira consistente, na aplicação dos conceitos em funções de várias variáveis para a resolução de problemas, de forma que os solucionaram e descreveram a ação essencial “interpretar a solução do modelo”.

A Etapa Verbal Externa, no que se refere ao desempenho dos estudantes, pôde ser observada na forma escrita uma vez que foram poucos os encontros presenciais do professor com os alunos. De modo geral o desempenho ocorreu de maneira correta, sendo observado na resolução dos problemas (P-01 e P-02), em que foram analisadas a assimilação por meio das atividades práticas e provas de lápis e papel neste período, quanto ao conceito de derivadas parciais e sua aplicação na área da medicina.

O desenvolvimento das ações para a assimilação das ideias de derivadas parciais tiveram início a partir da própria definição e das regras de derivação, que foram utilizadas em um problema tradicional e no problema da área superficial do corpo humano. Com isso, foram observadas as ações dos estudantes na execução dos problemas conforme a Atividade de Situação Problema nos problemas analisados.

No desempenho dos estudantes (A-01, A-02, A-04, A-06, A-07 e A-08), apesar do nível correto na comparação da assimilação nos dois problemas desta fase, não se caracterizar tão positivamente, mesmo assim, pôde-se identificar avanço positivo neste momento, uma vez que a maioria resolveu os cálculos do primeiro problema com êxito. Ressalta-se que o único a

realizar a ação do segundo problema de forma totalmente correta foi o estudante (A-06), pois identificou as propriedades essenciais do assunto. Os estudantes A-03, A-05 e A-09 faltaram na aplicação destes problemas.

Conforme a fase da Linguagem Externa, os problemas se destacaram com um grau mais elevado de complexidade que o da etapa anterior, a análise de maneira verbal foi realizada por meio da aula presencial de tira-dúvidas e a análise descritiva de acordo com a resolução das provas de lápis e papel. Porém, devido à apresentação de problemas similares na aula de tira-dúvidas estes tiveram um bom desempenho no problema (P-03 e P-04). Os problemas abrangiam o contexto dos conceitos essenciais da derivação acrescentados a outras propriedades necessárias ao novo conhecimento, que se transformaria em habilidades específicas dos estudantes os quais, conforme os conceitos adquiridos, souberam realizar a transferência em novas situações problema.

De acordo com o desempenho, nesta fase, foi verificado que o estudante (A-01) obteve avanço na utilização do conceito de derivadas parciais e suas regras nos problemas matemáticos com o uso das ações e operações da atividade de situações problemas, porém percebeu-se que sua assimilação na forma externa para si não estava totalmente organizada, mas sim em desenvolvimento, o estudante esteve presente nas aulas presenciais de tira-dúvidas e na videoconferência o que contribuiu para o seu progresso.

O estudante (A-02) demonstrou ter conhecimento razoável dos conceitos e propriedades essenciais das derivadas parciais, pois em alguns momentos fez uso das regras corretamente, mas percebeu-se que lhe faltou mais atenção no processo de assimilação na resolução dos problemas, o que mostra que sua habilidade conceitual ainda estava em desenvolvimento, porém para a conclusão desta etapa houve avanço satisfatório.

O estudante (A-03) não compareceu na aplicação do problema (P-03 e P-04), mas participou da videoconferência ministrada pelo professor da disciplina e executou atividades obrigatórias explícitas no ambiente virtual de aprendizagem.

O estudante (A-04) obteve avanço, pois realizou a ação de maneira correta nos dois problemas, demonstrando seu conhecimento quanto aos conceitos nas aplicações de derivadas parciais, pôde-se perceber que apenas a sua falta de concentração no momento deixou de levá-lo ao êxito total na resolução do problema, desse modo, sua assimilação estava caminhando para a forma consistente.

O estudante (A-05) faltou na aplicação da fase formativa, tendo participação somente em algumas aulas práticas e na realização das atividades desta fase contidas no ambiente virtual de aprendizagem.

O estudante (A-06) participou de todas as aplicações das atividades nesta fase, sua participação nas aulas de tira-dúvidas, videoconferência foram primordiais para o desenvolvimento do seu desempenho na resolução dos problemas fazendo uso dos conceitos essenciais de derivadas parciais, participou ativamente das aulas atento e fazendo perguntas sobre o assunto. Desse modo, obteve avanço satisfatório, correto e consistente quanto aos conceitos necessários para solução do problema.

O estudante (A-07) esteve presente em todos os encontros presenciais, em relação à resolução dos dois problemas desta fase o seu desempenho ocorreu em nível correto. Suas ideias conceituais foram realizadas de maneira completa e totalmente correta no primeiro problema e parcialmente correta no segundo problema, o que implica que a assimilação quanto aos conceitos essenciais ainda se encontravam em desenvolvimento, mas passo a passo seguindo em rumo à consistência, ou seja, obteve êxito neste momento.

No desempenho do estudante (A-08), foi observado que na realização das ações mentais este obteve um desenvolvimento razoável, uma vez que no primeiro problema mostrou explicitamente o uso de todos os conceitos necessários para a resolução e interpretação do problema, porém resolveu o segundo problema de maneira incorreta, o que demonstrou que sua organização mental quanto ao conhecimento de derivadas parciais estava progredindo de forma lenta.

Após a análise dos problemas propostos, foi feito um resumo do desempenho qualitativo, dos estudantes na resolução dos problemas na fase formativa, expressas na (Tabela 12), que destacou a ação verbal e linguagem externa para si a qual foram primordiais para a apresentação resultado desta fase.

Tabela 12 – Resumo do Resultado da Fase Formativa

Estudante	Desempenho da Ação Verbal Externa (Ação Verbal)		Desempenho da Ação em linguagem Externa (Linguagem Externa para si)	
	P-01	P-02	P-03	P-04
A-01	Totalmente Correto	Razoavelmente correto	Totalmente correto	Razoavelmente correto
A-02	Totalmente correto	Incorreto	Incorreto	Correto
A-03	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)
A-04	Totalmente correto	Incorreto	Correto	Correto
A-05	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)
A-06	Correto	Totalmente correto	Totalmente correto	Correto
A-07	Correto	Razoavelmente correto	Totalmente correto	Correto

A-08	Totalmente correto	Incorreto	Totalmente correto	Incorreto
A-09	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)

Legenda: A-01 até A-09 (Estudantes de um a nove); P-01: Problema 1; P-02: Problema 2; P-03: Problema 3; P-04: Problema 4.

Nesta fase de modo geral, o desempenho dos estudantes foi classificado na forma correta, devido à complexidade dos problemas o desenvolvimento da assimilação das ideias de derivadas parciais aplicada a novos conceitos de sua aplicação, não ocorreram de maneira totalmente satisfatória quanto à solução e a interpretação da solução como ação essencial.

O desempenho dos estudantes na Ação Mental foi evidenciado por meio dos problemas (P-01 a P-04) da avaliação final analisados. No problema (P-01 e P-03), as respostas se apresentaram na forma totalmente correta, referente à solução e interpretação do resultado como ações essenciais nestes problemas. No problema (P-02), obtiveram-se as respostas de maneira razoavelmente correta, podendo isto ter ocorrido por causa do contexto e complexidade que se encontrava o problema, o que impossibilitou assim que os estudantes justificassem sua resposta. O problema (P-04) foi realizado em nível correto, pois requeria conceitos particulares e gerais por parte do estudante face a aplicação do contexto envolvido, o que pode ter comprometido a interpretação, que era a ação essencial.

De acordo com o desenvolvimento desta etapa, mas precisamente, o modo que o teste final foi aplicado, apenas pode-se dizer que a abstração encontrava-se implícita, embora o conceito de derivadas parciais tenham se apresentado de maneira explícita nas respostas dos problemas, ou seja, foram encontrados indícios de aprendizagem das características das ações, uma vez que essa atividade com 10 problemas, envolvendo todos os assuntos do semestre, foi realizada com consulta, e a abstração como característica desta etapa, deve ser realizada sem nenhuma consulta.

Para se chegar a esta etapa foi necessário perpassar as etapas anteriores, em que as ações foram realizadas a partir do conhecimento já adquirido do conteúdo de derivadas parciais, em que foi demonstrado a solução e interpretação do modelo matemático pelos estudantes. Ressalta-se que os problemas trabalhados neste momento eram complexos e envolviam conceitos particulares e conceitos gerais na aplicação da derivada parcial.

Foi possível observar que no problema (P-01) os estudantes de modo geral, apresentaram um avanço de maneira totalmente correto, resolveram o problema de forma a deixar expresso que haviam compreendido, dando solução e interpretando-o. Sendo possível assim detectar que estes tinham o domínio das propriedades essenciais.

No entanto, a resolução do problema (P-02) se destacou em nível razoavelmente correto, por ter sido realizado pelos estudantes de forma incompleta. Porém foi observado que, apesar de conhecerem as propriedades essenciais e por esta ter os levado a solução do modelo, sua interpretação foi insatisfatória, pois ocorreu por tentativa de ensaio e erro.

No problema (P-03), o desempenho foi satisfatório, se desenvolveu em nível totalmente correto, em que foi percebido que os estudantes souberam aplicar o conceito de derivadas parciais na resolução, e descrevendo o resultado da ação essencial interpretar a solução.

Os estudantes, no problema (P-04), obtiveram um aproveitamento de maneira correta, apresentaram solução do modelo, por meio dos conceitos particulares e gerais das ideias conceituais de derivada parcial e sua aplicação na produção, no entanto realizaram a interpretação de forma incompleta, implicando assim que seus conhecimentos foram insuficientes na execução da ação essencial.

Portanto, conforme o desenvolvimento das atividades realizadas no decorrer da pesquisa, o desempenho dos estudantes foi melhorando e estes, aos poucos, passavam a compreender novos conceitos a partir dos adquiridos anteriormente, implicando assim na etapa final indícios de aprendizagem da ação mental.

3.3.7 Análise da Contribuição da Atividade de Situações Problemas aos Estudantes

A maioria dos estudantes sujeitos desta pesquisa relataram que, ao cursarem o ensino médio, seus professores haviam utilizado problemas matemáticos nas aulas, no entanto o passo a passo dos métodos de resolução de problemas não se encontravam presentes nas aulas.

No ensino superior, estes estudantes, antes de cursar o Cálculo III em que foi realizada a pesquisa, descreveram que no processo de ensino-aprendizagem estudaram sobre resolução de maneira superficial, sem a aplicabilidade de um método específico, os problemas estudados envolviam mais os conteúdos de matemática do ensino médio. Anteriormente haviam estudado sobre a Atividade de Situações Problemas, mas de maneira teórica com o mínimo de prática, a qual não utilizaram no desenvolvimento das resoluções o passo a passo da ASP.

Por conseguinte, o conhecimento dos estudantes referente às teorias de aprendizagem existentes, alguns citaram a Teoria de Polya sobre resolução de problemas, que haviam estudado alguns artigos, apenas teóricos. Desse modo, seus conhecimentos sobre as teorias de aprendizagem existentes não são expressivas.

Enquanto futuros professores os estudantes descreveram que a ASP, por meio de suas ações e operações facilita a aprendizagem, os ajudará na prática em sala de aula, tornando as aulas mais agradáveis e satisfatórias por meio de problemas contextualizados. Quanto à importância da ASP estes como futuros professores, o estudante descreveu: *“O acadêmico formula sua base de pensamentos resolutivos de forma detalhada com passos e técnicas apuradas através de um contexto científico que beneficia diretamente a compreensão das fases do problema”*.

O estudo do Cálculo III por meio da ASP contribuiu com o progresso dos estudantes no decorrer da disciplina, pois a interpretação e análise dos cálculos através das quatro ações da ASP: compreender o problema, construir o modelo, solucionar o modelo e interpretar a solução, apresentou facilidade aos acadêmicos na disseminação de informações de maneira detalhada, possibilitando assim melhor compreensão do conteúdo. O estudante destacou que: *“Ela contribui na compreensão dos problemas, ensina o aluno a pensar na maneira de organizar e tirar as informações que está dentro do problema”*.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa discutiu-se o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem por meio da aplicação da Atividade de Situações Problema e da teoria de formação por etapas das ações mentais no ensino de derivadas parciais aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD do Polo de Alto Alegre.

Conforme o objetivo geral apresentado na investigação, explica-se no texto como ocorreu o processo de ensino-aprendizagem da Atividade de Situações Problema em derivadas parciais utilizando a resolução de problema como metodologia de ensino, fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais. De acordo com as evidências expostas nos resultados relacionados aos objetivos, obteve-se êxito nesta proposta, pois as análises destacam de maneira positiva a aprendizagem dos estudantes de licenciatura em Matemática, modalidade a distância, na Universidade Federal de Roraima.

O estudo estrutura-se em três objetivos específicos, que atingidos permitem chegar ao resultado final deste trabalho.

O primeiro objetivo específico teve como proposta diagnosticar o nível de partida dos estudantes na resolução de problemas no conteúdo de derivadas parciais. Por meio da aplicação de uma prova diagnóstica foi possível identificar o nível do conhecimento dos estudantes em relação ao conteúdo, o qual apresentaram um nível baixo de habilidades no conteúdo de derivadas de funções de uma variável na resolução de problemas matemáticos. Partindo destes resultados foi elaborada a Base Orientadora da Ação (geral, completa e preparada), de acordo com os três momentos da didática em derivadas parciais.

De acordo com a análise nas três fases da prova de lápis e papel: diagnóstica, formativa e final do processo de ensino-aprendizagem, os estudantes obtiveram desempenho satisfatório na terceira ação, ou seja, “solucionar o modelo matemático”, seguido da quarta ação que é “interpretar a solução do modelo”.

A partir da execução da atividade de situações problema da didática em derivadas parciais no desenvolvimento da disciplina foi possível descrever o efeito desta sequência didática por meio da resolução de problema e da Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin. As atividades realizadas nas aulas presenciais e no ambiente virtual de aprendizagem, as provas e a observação direta permitiram a obtenção dos resultados da descrição do desempenho dos estudantes na formação das ações mentais, em que pôde-se perceber o progresso na resolução dos problemas pelos alunos conforme percorriam as três fases, o que foi

demonstrado a partir dos instrumentos de análise, os quais foram os resultados no enfoque qualitativo e quantitativo.

A ASP contribuiu positivamente na aprendizagem do Cálculo III, pois seu sistema de quatro ações com suas operações foram necessárias e importantes para que ocorresse a assimilação dos conceitos essenciais de derivadas parciais e suas aplicações, o passo a passo das ações na execução de problemas possibilitaram uma compreensão satisfatória do assunto, permitindo também que fossem identificadas as características das ações de acordo com a Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin.

A ASP desenhada por quatro ações invariantes e suas respectivas operações, como uma estratégia metodológica de ensino, adaptada ao estudo do conteúdo de derivadas parciais, e empregada na aprendizagem, mostrou evidências de indícios de aprendizagem na assimilação dos conceitos, conforme explicações descritas e fundamentadas na teoria de Galperin.

As ações e operações da ASP nos problemas analisados, permitiram obtenção dos resultados do desempenho dos estudantes no enfoque qualitativo e quantitativo. Em cada problema foi escolhida uma ação essencial de destaque, conforme especificado no resultado dos instrumentos da avaliação diagnóstica, formativa e final.

As etapas das ações mentais foram fundamentais para que os conceitos fossem assimilados pelos estudantes, pois como composição do processo em estudo, estiveram presentes durante todo o desenvolvimento do conteúdo de derivadas na disciplina de cálculo III da licenciatura em matemática a distância. As características das ações de maneira geral possibilitaram a realização da análise da assimilação do conceito de derivadas parciais pelos estudantes.

Desse modo, pode-se afirmar que a Atividade de Situações Problemas, Atividade de Situações Problemas da Didática em Derivadas Parciais e a Teoria de Formação Por Etapas das Ações Mentais na resolução de problemas matemáticos permitiram obter dados significativos na pesquisa. Porém, este campo de estudo é bastante abrangente, o que evidencia que existe um caminho aberto para que trabalhos futuros sejam realizados pelos pesquisadores desta temática, uma vez que possui dados significativos, que podem ser expandidos, aprofundados, como também, a utilização do modelo desta pesquisa pode ser adaptado a outros conteúdos matemáticos, permitindo alcançar resultados ainda mais satisfatórios, quanto ao uso da ASP e das etapas das ações mentais no conteúdo matemático visando o processo de ensino-aprendizagem. Assim poderá contribuir ainda mais com os pesquisadores das áreas de ensino.

Assim, a investigação descrita visa contribuir com a realização de estudos envolvendo a resolução de problemas na área das ciências Exatas e/ou aplicadas e Educação. Portanto,

recomenda-se esta pesquisa especialmente aos professores de matemática que atuam na educação a distância e ensino presencial, como também aos que atuam no campo da ciência, os quais podem embasar suas aulas e estudos de pesquisa por meio do produto final elaborado neste trabalho “sequência didática”, o qual apresenta a sugestão de elaboração de aulas no contexto da resolução de problemas em matemática, na busca de contribuir com a prática do professor no ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. O.; SILVA, W. A. Comunidades Virtuais de Ensino e Aprendizagem: o aluno como sujeito in: **Curso de Capacitação em Moodle para Tutor**. Boa Vista: UFRR, 2013.
- ARAÚJO, M. T. L. S. et al. Resenha. Vygotsky, Leontiev, Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos. **Revista Profissão Docente**, Uberaba, v. 13, n.29, p. 114-118, jul./dez. 2013.
- BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis**. UFRJ, 2014. 149 p.
- CRESWELL, J.W. Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.
- CURY, H. N. **Análise de erros o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autentica, 2008.
- DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1991.
- DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2008. 344 p.
- DENZIN, N. k.; LINCOLN, Y. S. et al. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**, [Tradução Sandra Regina Netz], Porto Alegre: Artmed, 2006.
- HAZZAN, S.; MORETIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Cálculo de Funções de Várias Variáveis**. São Paulo: Atual, 1986, 173p.
- HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. 10ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- HUGHES-HALLETT et al. **Cálculo de uma variável** [Tradução Rafael José Iorio Júnior, Valéria de Magalhães Iorio], Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica: um**. [Tradução Cyro de Carvalho Patarra]. 3ª ed. – São Paulo: Harbra Ltda, 1994a.
- _____. **O Cálculo com Geometria Analítica: dois**. Tradução Cyro de Carvalho Patarra. 3ª ed. – São Paulo: Harbra Ltda, 1994b.
- MAURA, V. G. et al. **Psicología para educadores**. Cuba: Pueblo y Educación, 1995.
- MENDOZA, H. J. G. **Estudio del efecto del sistema de acciones en el proceso de aprendizaje de los alumnos en la actividad de situaciones problemas em Matemática, en la asignatura de Álgebra Lineal, en el contexto de la Facultad Actual de la Amazonia**. Teses (doutorado em psicopedagogia). Faculdade de Humanidade e Ciência na Educação. Universidade de Jaén, 2009a.

_____. **Didática da Matemática: A Atividade de Situações Problema em Matemática; A Atividade de Situações Problema da Didática e a Resolução de Situações Problema da Didática da Matemática.** Boa Vista: MENDOZA, Héctor José García, 2010a. 18.

_____. **Didática da Matemática: A Atividade de Situações Problema em Matemática.** Boa Vista: MENDOZA, Héctor José García, 2010b. 20.

_____. **Direção do Processo de Estudo; Construção da Atividade de Situações Problema em Matemática.** Boa Vista: MENDOZA, Héctor José García, 2010c. 21.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D.; CASTAÑEDA, A. M. M. **Efeito do Sistema de Ações no Processo de Aprendizagem dos Alunos na Atividade de Situações Problema em Sistema de Equações Lineares.** In: VIII Congresso Norte e Nordeste de Educação em Ciência e Matemática. Boa Vista. ISBN 978-85-61924-02-7, 2009b.

MENDOZA, H. J. G.; COLÓN, A. M. O.; MORENO, J. M.; TINTORER, O. D. **La teoría de la actividad de formación por etapas de las acciones mentales em la resolución de problemas.** Revista Inter Science Place, Rio de Janeiro. Ano 2 - N ° 09 Setembro/Outubro – 2009c.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. **Formación del Método de la Actividad de Situaciones Problema en Matemática,** 2010.

_____. **Sistema de ações para melhorar o desempenho dos alunos na atividade de situações problema em matemática.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, 2011.

_____. **A Contribuição de Galperin na Avaliação de Provas de Lápis e Papel de Sistemas de Equações Lineares.** Revista de Psicopedagogia, Psicologia Escolar e Educação, v. XII, p. 289-323, 2013.

_____. **Formação por Etapas das Ações Mentais na Atividade de Situações Problema em Matemática,** 2010.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. **A Didática da Matemática Fundamentada na Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin.** In: NUNEZ, Isauro Beltrán; Ramalho, Betânia Late. Ya Galperin e a Teoria da Assimilação Mental por Etapas: pesquisas e experiências para o ensino inovador, no prelo 2015.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. **A Atividade de Situações Problema em Matemática.** In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. **Aprendizagem desenvolvimento: Implicações para e do ensino.** EDUFU, no prelo 2015.

MOREIRA, M. A; ROSA, P. R. S. **Subsídios Metodológicos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências. Pesquisa em Ensino: Métodos Qualitativos e Quantitativos.** 1ª edição. Porto Alegre, 2009.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

_____. **Uma Introdução à Pesquisa Quantitativa em Ensino**. Campo Grande: UFMS, 2013.

NUÑEZ, I. B.; PACHECO, O. G. **Formação de Conceitos Segundo a Teoria de Assimilação de Galperin**. Tradução Áurea Maria Corsi. Cad. Pesq. n. 105 p. 92-109 nov.1998.

NUÑEZ, I. B.; OLIVEIRA, M. V. F. P. Ya. Galperin: a vida e a obra do criador da teoria de formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 283-313.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. 5. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

PEREIRA, J. E. **Formação da habilidade de interpretar gráficos cartesianos em licenciandos em química segundo a teoria de P. Ya. Galperin**. 2013. 316 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

RIBEIRO, R. P. **O Processo de Aprendizagem de Professores do Ensino Fundamental: apropriação da habilidade de planejar situações de ensino de conceitos**. 2008. p. 230. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa Social: métodos e técnicas**. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. H.; LUCIO, P. B. **Metodologia da Pesquisa**. Tradução Fátima Conceição Murad; Melissa Kassner e Sheila Clara Dystyler Ladeiral. 3ª ed. – São Paulo: Mac Graw Hill, 2006.

_____. **Metodología de la Investigación**. 4ª ed. – México: Mac Graw Hill, 2006.

SANTOS, S. A. **Estudo da aprendizagem na atividade de situações problema em limite de funções de uma variável, fundamentado na teoria da formação por etapas das ações mentais de Galperin, na licenciatura em matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima**. 2014. 197 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**, Volume II, [Tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins], São Paulo: Thomson Learning, 2007.

STRAUSS, A. **Pesquisa Qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. [Tradução Luciane de Oliveira da Rocha]. 2ª ed. – Porto Alegre: Artmed, 2008.

TALÍZINA, N. **Psicología de La Enseñanza**. Moscú: Progreso, 1988.

_____. **Manual de Psicología Pedagógica**. México, DF: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2000.

TINTORER, O. D.; MENDOZA, H. J. G.; CASTAÑEDA, A. M. M. **Implicação da Base Orientação das Ações e Direção do Processo de Estudo na Aprendizagem dos Alunos na Atividade de Situações Problema em Sistema de Equações Lineares.** In: VIII Congresso Norte e Nordeste de Educação em Ciência e Matemática, 2009, Boa Vista. ISBN 978-85-61924-02-7.

TINTORER, O. D. **A Resolução de Problemas em Educação em Ciências e Matemática.** Boa Vista, [2013]. 22 slides, color.

_____. **A Didática da Matemática como Disciplina na Formação de Professores.** V Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas, p. 1-7, out. 2010.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** São Paulo: Addison Wesley, 2009.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA. Centro de Ciências e Tecnologia Departamento de Matemática. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Matemática a Distância.** Boa Vista, 2013. 73p.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: planejamento e métodos.** Tradução Ana Thorell. 4ª ed. – Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Exemplos de Problemas no Modelo da Atividade de Situações Problemas em Derivadas Parciais

Ex.5: A produção de uma certa fábrica é dada pela função de produção de Cobb-Douglas $Q(k, L) = 60k^{1/3}L^{2/3}$ unidades, onde k é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão de obra em homens-horas.

- Calcule a produção da fábrica para um capital imobilizado de R\$ 512.000,00 e um volume de mão de obra de 1.000 homens-horas.
- Mostre que a produção calculada no item (a) será duas vezes maior se o capital imobilizado e o volume da mão de obra forem multiplicados por dois.

Solução:

- Calculamos $Q(k, L)$ para $k = 512$ (milhares) e $L = 1.000$:

$$\begin{aligned} Q(512, 1.000) &= 60(512)^{\frac{1}{3}}(1.000)^{\frac{2}{3}} \\ &= 60(8)(100) = 48.000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

- Calculamos $Q(k, L)$ para $k = 2(512)$ e $L = 2(1.000)$:

$$\begin{aligned} Q[2(512), 2(1.000)] &= 60[2(512)]^{\frac{1}{3}} [2(1.000)]^{\frac{2}{3}} \\ &= 60(2)^{\frac{1}{3}}(512)^{\frac{1}{3}}(2)^{\frac{2}{3}}(1.000)^{\frac{2}{3}} = 96.000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

que é duas vezes maior que a produção calculada no item (a).

Ex. 6: Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

Solução:

I. Compreender o Problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados desconhecidos do problema. Temos que compreender os diferentes conceitos que formam parte do enunciado.

Base do cone: é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva. Altura do cone: é a distância do vértice do cone ao plano da base.

Cone: é o sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região.

Cone circular reto: é considerado reto quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o ponto central da base. Podendo ser chamado também de cone de revolução, por ser formado pela rotação de um triângulo retângulo em volta de um de seus catetos.

Estimar: fazer estimativa de; avaliar, calcular. Determinar o valor aproximado.

Determinar e interpretar os dados do problema

- A medida do raio da base do cone circular reto é 10 cm;
- A medida da altura do cone circular reto é 25 cm;
- O erro máximo na medida da base e da altura do cone circular reto é 0,1 cm.

O objetivo do problema é estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

II. Construção do modelo matemático

Determinar as variáveis

- A variável "V" representa o volume do cone, "r" o raio da base do cone e "h" a altura do cone.

Construção da diferencial de "V"

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

III. Solução do modelo matemático

Dada a diferencial $\left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right)'_r dr + \left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right)'_h dh$, queremos calcular o volume do cone circular reto

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Desse modo, calculamos a diferencial $z = f(x, y)$, que é assim denotada:

$$z = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

IV. Interpretar a solução

Sabemos que cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos $|\Delta r| \leq 0,1$, $|\Delta h| \leq 0,1$. Para achar o erro máximo no volume, tomamos o maior erro nas medidas de r e de h . Portanto tomamos $dr = 0,1$ e $dh = 0,1$ para $r = 10$, $h = 25$. Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0,1) + \frac{100\pi}{3} (0,1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de $20\pi \text{ cm}^3 \approx 63 \text{ cm}^3$.

Ex. 7: A temperatura T em graus C em um ponto (x, y) de uma placa de metal aquecida é dada por $T = \frac{300}{x^2 + y^2 + 3}$, onde x e y são medidos em centímetros.

- (a) Que direção tomar a partir do ponto $(-4, 3)$ a fim de que T aumente mais rapidamente?
 (b) Qual a velocidade de aumento de T quando alguém se move a partir do ponto $(-4, 3)$ na direção encontrada no item (a)?

Solução:

I. Compreender o problema:

Através da leitura do problema iremos extrair os dados e elementos desconhecidos.

Determinar e interpretar os dados do problema.

- A temperatura é dada em graus C no ponto (x, y) de uma placa de metal aquecida.
- x e y são medidos em centímetros.

O objetivo do problema é determinar a direção a partir do ponto dado de modo que T aumente rapidamente, e a velocidade de aumento de T .

II. Construção do modelo matemático.

Determinar as variáveis

- A variável “ T ” representa a temperatura.
- x e y são pontos medidos em centímetros.

III. Solução do modelo matemático

$$(a) \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j = \frac{-600x}{(x^2 + y^2 + 3)^2} i + \frac{-600y}{(x^2 + y^2 + 3)^2} j;$$

Dai quando $x = -4$ e $y = 3$, temos

$$\nabla T = \frac{2400}{784} i - \frac{1800}{784} j \text{ e}$$

$$|\nabla T| = \sqrt{\left(\frac{2400}{784}\right)^2 + \left(-\frac{1800}{784}\right)^2} = \frac{3000}{784} = \frac{375}{98}.$$

Portanto, a fim de maximizar $D_{\bar{u}}T$ em $(-4, 3)$, escolhemos um vetor unitário \bar{u} na direção de ∇T , isto é,

$$\bar{u} = \frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \frac{4}{5} i - \frac{3}{5} j.$$

VI. Interpretação da solução

Quando nos movemos através de $(-4, 3)$ na direção de \bar{u} , a taxa instantânea de variação de T em relação a distância é dada por

$$D_{\bar{u}}T = |\nabla T| = \frac{375}{98} \approx 3,83 \text{ graus C por centímetro.}$$

APÊNDICE B - Regras Básicas no Nível de Partida e as Propriedades Essenciais em Derivadas Parciais

Conteúdos Básicos Sobre Nível de Partida

Destaca-se neste momento os conhecimentos básicos necessários para resolver derivada de função de uma variável, que foram elaborados e utilizados na fase de análise da prova diagnóstica e formativa, que podem ser utilizados para resolver cálculos de derivadas.

Primeiramente verifica-se, se a função é simples ou composta, nesse sentido se for simples pode-se responder por meio da definição formal ou as técnicas de derivação (regras) adequadas à questão. Tem-se como definição formal: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se o limite existir.

Como técnicas de derivação temos a **Regra da Constante** em que, para qualquer constante c , $\frac{d}{dx} [c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. A **Regra da Potência**, qualquer número real n , $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.

A **Regra da Multiplicação** por uma Constante: Se c é uma constante e $f(x)$ é uma função derivável, $cf(x)$ também é uma função derivável e $\frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} [f(x)]$, a derivada do múltiplo de uma função é o múltiplo da derivada da função. A **Regra da Soma**: Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções deriváveis, a soma $S(x) = f(x) + g(x)$ também é uma função derivável e $S'(x) = f'(x) + g'(x)$, ou seja, $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] + \frac{d}{dx} [g(x)]$, a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas das funções.

Na **Regra do Produto**: Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis no ponto x , o produto $P(x) = f(x)g(x)$ também é derivável e $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x) \frac{d}{dx} [g(x)] + g(x) \frac{d}{dx} [f(x)]$ o que também pode ser escrito $(fg)' = fg' + gf'$, a derivada do produto fg é igual f vezes a derivada de g mais g vezes a derivada de f . A **Regra do Quociente**: Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, o quociente $Q(x) = f(x)/g(x)$ também é derivável e $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{g^2(x)}$ se $g(x) \neq 0$.

Na **Regra da Cadeia**: Se y é uma função derivável de u e $u = g(x)$ é uma função derivável de x , a função composta $y = f(g(x))$ é uma função derivável de x cuja derivada é dada pelo produto $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, que também pode ser escrito na forma $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$.

Se a função for composta, utiliza-se a regra da cadeia para resolver os cálculos. Esta regra se apresenta da seguinte forma, se y é uma função derivável de u e $u = g(x)$ é uma função derivável de x , a função composta $y = f(g(x))$ é uma função derivável de x cuja derivada é dada pelo produto $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ que também pode ser escrito na forma $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$.

Para a compreensão e resolução dos problemas referentes ao conteúdo de derivadas parciais, além das técnicas apresentadas, se fez necessário o conhecimento das seguintes propriedades essenciais: uma função f de duas variáveis, x e y , é derivável em relação a x , permanecendo a variável y constante, denotada por, $f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, se o limite existir. Do mesmo modo, a derivada parcial de f em relação a y , permanecendo a variável x constante, denotada por, $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, se o limite existir.

De acordo com a prova formativa se fez necessário primeiramente identificar as variáveis, envolvidas em cada problema. O primeiro problema, $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$ possui duas variáveis x e y , o segundo $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y-z} \text{ cm}^3/\text{s}$ três variáveis x, y e z e o terceiro $P(x, y, u, v) = \frac{100xy}{xy+uv}$ quatro variáveis.

No segundo momento, verifica-se qual ou quais variáveis o problema determina que seja resolvido. Assim, em $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$ pede-se que a derivada parcial seja calculada em relação x e y . No segundo problema $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y-z} \text{ cm}^3/\text{s}$ se faz necessário calcular a derivada parcial em relação a z . Então x e y permanecem constantes. No terceiro problema $P(x, y, u, v) = \frac{100xy}{xy+uv}$ deve-se calcular as derivadas parciais P_x, P_y, P_u, P_v . Na prova final foram utilizadas as regras explicitadas e a definição de derivada parcial.

Por fim, resolve-se o problema utilizando a definição formal para derivadas parciais ou as técnicas de derivação (regras) adequadas em relação às variáveis explícitas no problema. Ressalta-se que é necessário conhecer e saber utilizar as técnicas de derivação para resolver problemas de derivadas parciais e suas aplicações.

APÊNDICE C - Síntese do Desempenho dos Alunos (A-02 até A-09) na Fase Diagnóstica

Tabela 15 – Fase Diagnóstica (A-01)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	3	-	5	2
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 16 – Fase Diagnóstica (A-02)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 17 – Fase Diagnóstica (A-03)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	1	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 18 – Fase Diagnóstica (A-04)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	2	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 19 – Fase Diagnóstica (A-05)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	2	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 20 – Fase Diagnóstica (A-06)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 21 – Fase Diagnóstica (A-07)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

Tabela 22 – Fase Diagnóstica (A-08)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	-	-	1	1
nº 4	1	1	1	1

APÊNDICE D - Síntese do Desempenho do Aluno (A-02 até A-09) na Fase Formativa

Tabela 23 – Fase Formativa (A-01)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	2	-	2	1
nº 3	1	-	5	5
nº 4	2	1	3	1

Tabela 25 – Fase Formativa (A-04)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	1	1
nº 3	1	-	3	5
nº 4	1	1	5	5

Tabela 27 – Fase Formativa (A-07)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	3	-
nº 2	2	-	3	2
nº 3	1	-	5	5
nº 4	1	3	5	5

Tabela 24 – Fase Formativa (A-02)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	2	-	3	1
nº 3	2	-	2	1
nº 4	5	3	5	3

Tabela 26 – Fase Formativa (A-06)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	3	-
nº 2	2	-	5	5
nº 3	1	-	5	5
nº 4	5	1	4	4

Tabela 28 – Fase Formativa (A-08)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	-	5	-
nº 2	1	-	3	1
nº 3	1	-	5	5
nº 4	1	1	1	1

APÊNDICE E - Síntese do Desempenho dos Alunos (A-02 até A-09) na Fase Final

Tabela 29 – Fase Final (A-01)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 31 – Fase Final (A-03)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 33 – Fase Final (A-05)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 35 – Fase Final (A-07)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 37 – Fase Final (A-09)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 30 – Fase Final (A-02)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 32 – Fase Final (A-04)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 34 – Fase Final (A-06)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

Tabela 36 – Fase Final (A-08)				
P	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
nº 1	-	5	5	5
nº 2	1	-	5	1
nº 3	1	1	5	5
nº 4	1	-	5	2

APÊNDICE F - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos no Nível de Partida

Dissertação: A ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA E A FORMAÇÃO POR ETAPAS MENTAIS DE GALPERIN NA APRENDIZAGEM DE DERIVADAS PARCIAIS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, MODALIDADE A DISTÂNCIA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA

Mestranda: Priscila Feitoza Bezerra Sampaio

Orientador: Héctor José Garcia Mendoza

RESULTADO DA ANÁLISE QUALITATIVA E QUANTITATIVA DO SISTEMA DE AÇÕES

Prova Diagnóstica

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o modelo matemático: <i>O estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal</i> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	<i>O estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ corretamente, utilizando a regra da potência e da constante, após substitui o valor da variável x chegando assim ao resultado.</i> <i>O estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ corretamente por meio da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$ e da constante $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$. E também realiza o cálculo da segunda e terceira derivada fazendo uso das mesmas regras, mas deixa a terceira derivada incompleta.</i>	5
	c) Solucionar o modelo matemático.	<i>O estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$ incorretamente, pois substitui a função u na y mas não deriva chega a formar uma equação do 2º grau e calcula o x' e x''.</i> <i>O estudante resolve a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente, pois substitui a função u na y mas não deriva chega a formar uma equação do 2º grau e calcula o x' e x'' chegando a um resultado não solicitado na questão.</i>	5 1
			1

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante identificou o modelo matemático das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante $c, \frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real $n, \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	-
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve o problema $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ corretamente fazendo uso das regras derivação, regra da potência e da constante, mas ao substituir o valor de x na derivada encontrada $f(x) = -800x + 6.800$, realiza o cálculo, mas deixa o resultado incompleto, impossibilitando assim a interpretação da solução.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante ao substituir o valor de x na derivada encontrada $f(x) = -800x + 6.800$, realiza o cálculo, mas deixa o resultado incompleto, impossibilitando assim a interpretação da solução.	2	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ incorretamente, pois substitui o $x = 0$ antes de realizar o processo de derivação, o qual deveria utilizar a regra da potência e ao final fazer a substituição do zero onde estivesse a variável x . O estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ corretamente por meio da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ e da constante $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$.	1
	c) Solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$ incorretamente, apesar de ter derivado $y = 5u^2 + u - 1$ da forma correta fazendo uso da regra da potência e da constante, não derivou $u = 3x + 1$, apenas a substituiu na primeira função já derivada, na questão proposta seria necessário utilizar a regra da cadeia $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$. O estudante resolve a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente, apesar de derivar corretamente a primeira função $y = \frac{1}{u^2}$ fazendo uso da regra da potência, não derivou a segunda função $u = 2x + 3$, apenas substituiu na primeira. Para que a questão ficasse correta este teria que fazer uso da regra da cadeia $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$.	5 2
			2

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	d) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: Não identificou o modelo matemático da definição formal: A derivada da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ dada por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se o limite existir, e nem das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante c , $\frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real n , $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve o problema $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ incorretamente pois não fez uso de nenhuma forma de derivação, apenas substituiu o as 9000 unidades produzidas na função dada, chegando ao um resultado errado por meio do ensaio e erro.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve problema $f(x) = -0,0035x^3 + 0,07x^2 + 25 - 200$ incorretamente, pois não faz uso das técnicas de derivação, apenas substitui os valores de $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$ na função encontrada por meio de ensaio e erro, obtendo assim valores incorretos para x .	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Faz a interpretação de modo incorreto, pois os resultados necessários para a interpretação estão incorretos.	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não realizou Estudante não resolveu nenhuma pergunta da Prova.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1, 2,3 e 4) não fez

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ mas chega a um resultado incorreto. A estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ parcialmente correta utilizando a regra da potência e da constante, pois ao final apenas iguala a zero o resultado encontrado, em vez de substituir o valor de x na derivada encontrada. A estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ por meio do ensaio e erro e chega a um resultado incorreto, devido não utilizar corretamente o passo a passo da regra da potência e nem utilizar a regra da constante. A estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$ incorretamente por meio do ensaio e erro. A estudante não resolveu a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		2
	c) Solucionar o modelo matemático.		1
			1

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	d) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não identificou o modelo matemático das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante $c, \frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real $n, \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante resolve incorretamente a questão por meio do ensaio e erro e chega a um resultado incorreto.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpretou		
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: A estudante não resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$.	1
		A estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ parcialmente correta utilizando a regra da potência e da constante, pois ao final apenas iguala a zero o resultado encontrado, em vez de substituir o valor de x na derivada encontrada.	2
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	A estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ incorretamente por meio do ensaio e erro.	1
		A estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$ incorretamente por meio do ensaio e erro.	1
		A estudante resolveu a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente por meio do ensaio e erro.	1
	c) Solucionar o modelo matemático.		1

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	d) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não identificou o modelo matemático das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante c , $\frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real n , $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante soluciona o modelo matemático incorretamente por meio do ensaio e erro.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpretou	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ de forma parcial, utiliza a regra da potência e da constante, mas ao final não substitui o valor da variável x na derivada encontrada. O estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ incorretamente pois no processo de derivação utiliza apenas a regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$ chegando assim a um resultado errado. O estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$, de forma parcial em relação a y deriva incorretamente e em relação a u corretamente, também ao final deixa de realizar a substituição de valores na derivada bem como a utilização da regra adequada.	2
	c) Solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente, devido não fazer uso da regra de derivação adequada a questão.	1 2 1

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	d) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: Não identificou o modelo matemático da definição formal: A derivada da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ dada por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se o limite existir, e nem das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante c , $\frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real n , $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não realizou	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpretou	
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	d) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	A estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	A estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ incorretamente e de forma parcial, pois fez uso apenas da regra da potência, e ao final não substitui o valor da variável x na derivada encontrada. A estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ incorretamente pois no processo de derivação utiliza apenas a regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$ chegando assim a um resultado errado. A estudante resolve a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$, de forma parcial, em relação a y primeira função, deriva incorretamente, e em relação a u segunda função corretamente, também ao final deixa de realizar a substituição de valores na derivada bem como a utilização da regra adequada.	1
	c) Solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$ incorretamente, devido não fazer uso da regra de derivação adequada a questão.	2
			1

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: Não identificou o modelo matemático da definição formal: A derivada da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ dada por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se o limite existir, e nem das técnicas de derivação: Regra da Constante: Para qualquer constante c , $\frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real n , $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não realizou	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpretou	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	b) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a questão a) $f(x) = 4,9x^2$ corretamente fazendo uso da regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, realiza também o cálculo da segunda derivada mesmo não sendo pedida na questão, demonstrando ter conhecimento do cálculo de derivação. Poderia ter feito uso da definição formal $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	O estudante resolve a questão b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$ de forma parcialmente correta, pois faz o processo de derivação utilizando a regra da potência e da constante, também calcula a segunda derivada, mas ao final não realizou a substituição do valor da variável x na primeira derivada ficando assim a questão incompleta. O estudante resolve a questão c) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$ parcialmente correta pois utilizou apenas a regra da potência $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$. Mas calcula corretamente a segunda, terceira e quarta derivada fazendo uso da regra da potência e da constante mesmo não sendo solicitada o cálculo dessas derivadas no problema. O estudante não resolveu a questão d) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$. O estudante não resolve a questão e) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$.	2
	c) Solucionar o modelo matemático.		4
			1
			1

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não se faz necessário extrair os elementos desconhecidos do problema, pois a função já foi dada. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: Não identificou o modelo matemático da das técnicas de derivação de forma explícita: Regra da Constante: Para qualquer constante c , $\frac{d}{dx}[c] = 0$, a derivada de qualquer constante é nula. E Regra da Potência: Para qualquer número real n , $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{-1}$, para calcular a derivada de x^n , reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor do expoente.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a questão de forma incorreta e incompleta, até utiliza a regra da potência, mas utiliza um valor diferente do exposto no problema chegando assim a um resultado errado.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpretou	
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não interpreta	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: <i>Não realizou</i>	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: <i>Não realizou</i>	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou</i>	1
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1, 2, 3 e 4) faltou na aplicação.

APÊNDICE G - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos na Avaliação Formativa

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados derivando primeiramente em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais e após em relação a y usando as mesmas regra e conceito.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema evidenciando os dados explícitos, mas de forma resumida. Não define objetivo do problema.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante fez uso da regra da Potência e do conceito de derivadas parciais. Mas aplica a regra da potência de forma incompleta, pois se esquece de multiplicar o resultado pelo valor do expoente tanto em relação a w como em relação a h , chegando a encontrar um resultado incorreto para a derivada. Resolver as derivadas parciais $S_w(50, 163)$ e $S_H(50, 163)$ explicitas na letra b), mas chega a um resultado incorreto, pois seus êxito dependeria da derivada anteriormente encontrada, a qual o estudante chegou a um resultado errado, conseqüentemente o resultado da substituição dos valores de S_w (peso) e S_H (altura) solucionados de maneira incorreta. Não calcula a estimativa da variação do peso da criança, se está engordasse 1 kg.	2
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não realizou	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não determina as condições, apesar dos dados encontrarem-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais. Ao resolver a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados, mas ao final do processo não multiplica os coeficientes, deixando a resolução incompleta, isso não implica em um resultado incorreto, por isso que ao final o aluno obtém êxito. Ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830) na função $Q_K(K, L)$ e $Q_L(K, L)$, soluciona o modelo corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai os resultados significativos. Desse modo dar resposta ao objetivo do problema dizendo que para aumentar rapidamente a produtividade o fabricante deve aumentar a mão de obra.	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema mostrando que a fábrica possui 30 operários especializados e 60 operários não especializado. Mas define o objetivo do problema de forma incorreta.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis, a função encontra-se explícita no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante constrói o modelo matemático em relação a x e em relação a y fazendo uso da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais. Não realiza a estimativa de variação da produção. Faz a substituição dos valores na função dada para chegar ao resultado da variação exata, mas chega a um resultado incorreto devido não ter percebido que teria que usar o jogo de sinal.	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, mas seu resultado é incorreto e incompleto. Pois sua interpretação dependia dos dados da solução do modelo, os quais não estavam corretos.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados derivando primeiramente em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais e após em relação a y usando as mesmas regra e conceito.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema evidenciando os dados explícitos, porém deixa de expressar o coeficiente do cm da altura dado no problema. Não expressa corretamente o objetivo do problema, apenas expressa que o objetivo está ligado a criança e seu peso e altura.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante fazendo do uso da regra da Potência e do conceito de derivadas parciais, deriva corretamente em relação a w , mas em relação a h ao final do processo não multiplica os coeficientes, deixando a resolução incompleta. Não resolve as derivadas parciais $S_w(50, 163)$ e $S_H(50, 163)$ explicitas na letra b). Calcula a estimativa da variação do peso da criança incorretamente, devido fazer a substituição dos valores do peso e da altura da criança na derivada encontrada em relação a h , enquanto que o correto seria em relação a w .	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Resolve o cálculo do peso da criança de maneira incorreta, pois não utiliza a função referente a w (peso). Faz uso da função h que representa a altura, e por meio do ensaio e erro substitui valores incorretos nesta, chegando a um resultado errado. Desse modo apresenta resposta incorreta quanto ao objetivo do problema.	1
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema de forma parcial, mas estes dados encontram explícitos no problema.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais, mas chega a um resultado errado, pois no momento em que transcreveu a função apresentou um outro expoente para o L (o volume da mão de obra) diferente do já explicitado no problema. Ao resolver a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados, mas ao final do processo não multiplica os coeficientes, deixando a resolução incompleta, isso não implica em um resultado incorreto. Assim ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830), na função $Q_K(K,L)$ obtêm um resultado incorreto e na $Q_L(K, L)$ faz todo o passo a passo da resolução corretamente mas apresenta um resultado incorreto.	2
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante apresenta resposta ao objetivo do problema de maneira incorreta, pois ao solucionar o modelo cometeu erros que o levaram a uma interpretação errada.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema, pois descreve os dados e o objetivo do problema corretamente.	5
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina as variáveis do problema, mas não apresenta o modelo matemático conforme solicitado na letra b), mesmo este estando explícito no problema.	3
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático por meio da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais em relação a variável x conforme o solicitado. Também executa cálculos não pedidos no problema, derivando em relação a y .	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante realiza o processo de substituição dos coeficientes na derivada solicitada estimando assim a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado. Porém realiza todo o processo também em relação a y . O que o leva ao final a interpretar os dados da variável y em vez de x . Mas ao realizar o relatório baseado no objetivo do problema não obtém êxito, por descrevê-lo de forma errada, e em relação aos dados encontrados em y quando o correto seria em relação a x .	3	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1, 2, 3 e 4) faltou na aplicação.

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados derivando primeiramente em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais e após em relação a y usando as mesmas regra e conceito.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante não determina as condições do problema. Não define o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: Não soluciona o modelo, tenta montar a função substituindo os valores por meio do ensaio e erro, mas seria necessário primeiro derivar para após substituir valores.	1
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: não realizou	1
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante não determina as condições do problema, mesmo estes estando explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante resolve a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Ao resolver a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados, mas ao final do processo apresenta o expoente de L com valores positivos ($L^{0,3}$), enquanto que o correto seria com o sinal negativo ($L^{-0,3}$), implicando assim em um resultado incorreto. Ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830), na função $Q_K(K,L)$ obtêm um resultado incorreto, devido apresenta um outro numero no modelo da função já resolvida, que a leva ao erro e na $Q_L(K, L)$ faz o mesmo processo incorretamente .	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: A estudante apresenta resposta ao objetivo do problema de maneira correta, pois descreve que é necessário aumentar a mão de obra para aumentar a produção.	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante não determina as condições do problema, nem os objetivos do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: A estudante não determina as variáveis do problema, não apresenta o modelo matemático conforme solicitado na letra b), mesmo este estando explícito no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: A estudante soluciona corretamente o modelo matemático por meio da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais em relação a variável x conforme o solicitado. Também executa cálculos não pedidos no problema, derivando em relação a y .	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: A estudante realiza o processo de substituição dos coeficientes na derivada solicitada estimando assim a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado. Também realiza cálculos para encontrar a variação exata. Dar resposta ao objetivo do problema de maneira satisfatória.	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1, 2, 3 e 4) faltou na aplicação.

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados derivando primeiramente em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais, mas ao final se esquece de explicitar a variável y no resultado $f(x) = 15x^2 - 4x + 5$, deriva após em relação a y usando as mesmas regra e conceito obtendo êxito.	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema, mas não apresenta o objetivo do problema.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo corretamente fazendo uso da regra da Potência e do conceito de derivadas parciais em relação a w e após em relação a h . Resolver as derivadas parciais $S_w(50, 163)$ e $S_H(50, 163)$ explicitas na letra b), corretamente, utiliza na resolução a potência de 10 (base). Realiza a substituição dos valores de w (peso) e H (altura) na função encontrada S_w estimando dessa forma a variação do peso da criança, se está engordar 1kg e a altura permanecer inalterada. Faz cálculos além do solicitado (S_H), e calcula com êxito.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Extrai os dados necessários relacionados com o objetivo do problema. Dá resposta objetivo do problema estimando corretamente a variação da área superficial do corpo de uma criança quando está engorda 1 kg e sua altura permanece constante.	5
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não determina as condições do problema, mesmo estes estando explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Resolve a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados com êxito. Ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830), na função $Q_K(K,L)$ e $Q_L(K,L)$ desenvolve corretamente os cálculos.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante extrai os resultados significativos que o levam a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta, afirmando que se faz necessário aumentar a mão de obra, pois a mesma é maior que o investimento, obtendo assim um aumento na produção.	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante determina as condições do problema, define o objetivo do problema.	5
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, não apresenta o modelo matemático conforme solicitado na letra b), mesmo este estando explícito no problema. Mas demonstra saber qual é a função dada no problema ao solucionar o modelo.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona o modelo matemático por meio da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais em relação a variável x , mas esquece de que y permanece constante quando multiplicada (produto) com x e então excluiu y no resultado final, dando origem a uma função incorreta. Executa também cálculos não pedidos no problema, derivando em relação a y corretamente.	4
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante realiza o processo de substituição dos coeficientes na derivada encontrada em relação a x , mas chega a um resultado incorreto devido ao fato de ter cometido um erro a resolver a função modelo e ao substituir valores. Mas realiza o relatório corretamente baseado no objetivo do problema, estimando por meio do ensaio e erro a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado. Realiza cálculos da variação da produção para operários não especializados (y), de forma a encontrar a variação exata em relação a x e y , mas com esses cálculos acaba dando origem a novos dados em relação a variável, apresentando desse modo a possibilidade de reformulação do problema.	4	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais. Mas em relação a variável y deriva incorretamente.	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante determina as condições do problema, mas não apresenta o objetivo do problema.	2
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante soluciona o modelo por meio do ensaio e erro em relação a w , chegando a um resultado incorreto. Porém realiza os cálculos em relação a variável H fazendo uso da regra da Potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Não resolve as derivadas parciais $S_w(50,163)$ e $S_H(50, 163)$ explícitas na letra b).Realiza a substituição dos valores de w (peso) e H (altura) na função encontrada S_w , mas chega a um resultado incorreto por meio do ensaio e erro, pois havia calculado a função encontrada (modelo) de maneira errada, dessa forma não estima corretamente a variação do peso da criança, se está engordar 1kg e a altura permanecer inalterada. Faz cálculos de estimativa, não pedidos no problema em relação a (S_H) corretamente. Realiza outros cálculos não necessários em relação a w e H , na busca de encontrar a variação estimada, resolvendo de maneira correta somente em H , pois w , já havia apresentado erro na função encontrada.	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Extrai os dados necessários relacionados com o objetivo do problema de maneira parcialmente correta. Dar resposta ao objetivo do problema por meio do ensaio e erro, estimando incorretamente a variação da área superficial do corpo de uma criança quando está engorda 1 kg e sua altura permanece constante. Apresenta com cálculos não pedidos no problema a possibilidade de reformular o problema.	2	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante não determina as condições do problema, mesmo estes estando explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: A estudante resolve a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Resolve a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados com êxito. Ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830), na função $Q_K(K,L)$ e $Q_L(K,L)$ desenvolve corretamente os cálculos.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: A estudante extrai os resultados significativos que a levam a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta, afirmando que, “para que isso ocorra o fabricante deve aumentar a mão de obra”.		
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: A estudante não determina as condições do problema e o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: A estudante determina as variáveis do problema, mas não apresenta o modelo matemático conforme solicitado na letra b), mesmo este estando explícito no problema. Demonstra saber qual é a função dada no problema ao solucionar o modelo.	3
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: A estudante soluciona o modelo matemático corretamente por meio da regra da potência, da constante e do conceito de derivadas parciais em relação a variável x . Realiza cálculos não solicitados em relação a y mas apresenta resultados incorretos por meio do ensaio e erro, pois derivou de forma errada a função modelo em relação y . Faz substituições de valores na função f_x aumentando de 30 para 31 ($x + k$), o número de operários especializado de forma a estimar a variação da produção com mais 1 funcionário especializado, obtém êxito. Calcula também a estimativa não solicitada no problema para $(y + k)$, por meio do ensaio e erro obtendo um resultado incorreto.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: A estudante extrai resultados significativos relacionados ao objetivo do problema. Dar resposta ao objetivo do problema, estimando a variação da produção quando mais 1 operário especializado é contratado. Realiza cálculos da variação da produção para operários não especializados (y) por meio do ensaio e erro, apresentando desse modo a possibilidade de reformulação do problema.	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$, por meio dos métodos adequados em relação a x fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais. Deriva corretamente também em relação a variável y .	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não determina as condições do problema, não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo por meio do ensaio e erro em relação a w , chegando a um resultado incorreto. Porém realiza os cálculos em relação a variável H fazendo uso da regra da Potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Resolve as derivadas parciais $S_w(50,163)$ e $S_H(50, 163)$ explicitas na letra b), por meio do ensaio e erro em relação a S_w , chega em um resultado incorreto devido ter calculado a função encontrada em relação a w incorretamente. Resolve S_H de forma parcialmente correta, pois ao final multiplica o resultado por 1000, mas não descreve explicitamente o passo a passo desse produto. Não realiza a substituição dos valores de w (peso) e H (altura) na função encontrada S_w (por meio do ensaio erro). Portanto não estima a variação do peso da criança, se está engordar 1kg e a altura permanecer inalterada.	3
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: Não dá resposta ao objetivo do problema, ou seja, não estima a variação da área superficial do corpo de uma criança quando está engorda 1 kg e sua altura permanece constante.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não determina as condições do problema, mesmo estes estando explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve a função em relação a K (capital imobilizado), fazendo uso da regra da potência e do conceito de derivadas parciais corretamente. Resolve a função em relação a L , também utiliza os métodos matemáticos adequados com êxito. Ao fazer a substituição dos valores do capital imobilizado (R\$ 630.000,00) e do volume da mão de obra (830), na função $Q_K(K,L)$ e $Q_L(K,L)$ desenvolve corretamente os cálculos.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante extrai os resultados significativos que o levam a dar resposta ao objetivo do problema de maneira correta, afirmando que, <i>“para aumentar a produção e ter mais lucro e produtividade na empresa o fabricante deve aumentar mais a mão de obra que é a mais produtiva até o momento rendendo mais”</i> .	5	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não determina as condições do problema, e o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, não apresenta o modelo matemático conforme solicitado na letra b), mesmo este estando explícito no problema.	<i>1</i>
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante não soluciona o modelo matemático, apenas descreve a função dada no problema e substitui sem realizar o processo de derivação, deixando incompleta por meio do ensaio e erro.	<i>1</i>
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: <i>Não realizou.</i>		
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1, 2, 3 e 4) faltou na aplicação.

APÊNDICE H - Análise do Desempenho Qualitativo e Quantitativo dos Alunos na Avaliação Final

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-01): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dá resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dar resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-02): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-03): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-04): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-05): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dar resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-06): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-07): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dar resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-08): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 1)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P1	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante determina todas as variáveis, para aplicar na função explicitada no problema.	5
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático corretamente substituindo os valores das variáveis adequadamente na função explicitada no problema.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema, descrevendo que “a população daqui a 7 anos será de aproximadamente 6 168 309,3 habitantes”.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 2)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P2	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: Não extrai os diferentes conceitos que formam parte do enunciado. O estudante não determina e nem interpreta os dados do problema e não expõe o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante soluciona o modelo matemático $q = f(x, y)1000 - 2x^2 + 15y$ corretamente fazendo uso da regra da potência, constante e do conceito de derivadas parciais em relação a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcula a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(30,40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30,40)$, relacionadas ao preço da batata e do arroz corretamente.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O aluno justifica sua resposta incorretamente por meio do ensaio e erro.	1	
b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.			
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 3)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P3	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o Problema: O estudante não extrai os elementos desconhecidos do problema. Não apresenta o objetivo do problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Determinar as variáveis e incógnitas.	Construir o Modelo Matemático: O estudante não determina as variáveis do problema, mesmo estas se encontrando explícitas no problema.	1
	b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.		
	c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.		
	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo matemático: O estudante soluciona corretamente o modelo matemático fazendo uso do conceito de derivadas parciais.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a Solução: O estudante dá resposta ao objetivo do problema com êxito, pois apresenta a taxa de variação da vazão de sangue com a pressão do capilar, e afirma que a taxa é decrescente.	5
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Aluno (A-09): Resultado das Características das Ações no problema resolvido (Problema 4)

	Categoria/Subcategorias	Análise Qualitativa	Análise Quantitativa
P4	a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido	Compreender o problema: os dados encontram-se explícitos no problema.	1
	b) O aluno determina as condições do problema		
	c)O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.	Solucionar o Modelo Matemático: O estudante resolve corretamente derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q/\partial L^2$ e $\partial^2 Q/\partial K^2$ por meio da regra da potência e da constante e do conceito de derivada parcial de ordem superior.	5
	b) Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		
	c) Solucionar o modelo matemático.		
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	Interpretar a solução: O estudante extrai parcialmente os resultados significativos. Assim, dar resposta ao objetivo do problema de forma parcial devido não expressar corretamente o resultado encontrado.	2
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		

ANEXOS

ANEXO A- Prova de Lápis e Papel Formativa (Problemas)

A prova de avaliação formativa nº1 foi composta por quatro questões em que se utilizou o conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações, em que os problemas foram resolvidos, quando necessário com o auxílio da calculadora. Os problemas eram todos contextualizados com certa semelhança com as perguntas trabalhadas na etapa de orientação e material. Abaixo encontram-se os problemas nesta avaliação.

Pergunta 1:

De acordo com a definição calcule a derivada parcial em relação a x e y

c) $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y + 5x$

Nesta pergunta foi pedido que os alunos resolvessem a derivada parcial a qual está relacionada com a ação solucionar o modelo matemático.

Pergunta 2:

ANÁLISE MARGINAL O lucro diário de um varejista com a venda de duas marcas de suco de caju é $f(x, y) = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$ centavos, onde x é o preço de uma garrafa do primeiro suco e y é o preço de uma garrafa do segundo. No momento, uma garrafa do primeiro suco está sendo vendida por 50 centavos e uma garrafa do segundo por 52 centavos. Use a análise marginal para estimar qual será a variação do lucro diário se o varejista aumentar de 1 centavo o preço da garrafa do segundo suco e mantiver inalterado o preço do primeiro.

Neste problema foi solicitado a construção do modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução.

Pergunta 3:

PRODUTIVIDADE MARGINAL Um fabricante estima que a produção anual de uma certa fábrica é dada por $Q(K, L) = 30K^{0.3}L^{0.7}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão de obra em homens-horas.

- e) Determinar a produtividade marginal do capital, Q_K , e a produtividade marginal de mão de obra, Q_L . Para um capital imobilizado de R\$ 630.000,00 e um volume de mão de obra de 830 homens-horas.
- f) Para aumentar rapidamente a produtividade, o fabricante deve aumentar o investimento ou a mão de obra?

Nesta questão o inciso a) estava relacionado com a compreensão do problema e a solução do modelo matemático e o inciso b) com a interpretação da solução.

Pergunta 4:

PRODUTIVIDADE DE UM PAÍS A produção anual de um país é dada por $Q(K, L) = 150[0,4K^{-1/2} + 0,6L^{-1/2}]^{-2}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhões de dólares e L é o volume de mão de obra em milhares de homens-horas.

- a) Determine a produtividade marginal do capital, Q_K , e a produtividade marginal da mão de obra, Q_L .
- b) No momento, o capital imobilizado é de 5,041 bilhões de dólares ($K = 5.041$) e o volume de mão de obra é de 4.900.000 homens-horas ($L = 4.900$). Calcule as produtividades marginais Q_K e Q_L para esses valores de K e L .
- c) Para que a produtividade aumente o mais depressa possível, o governo do país deve estimular o aumento do capital imobilizado ou da mão de obra?

Nesta pergunta o inciso a) estava relacionado com a ação construir o modelo matemático e a solução do modelo, o inciso b) com a ação interpretar a solução e o c) com a compreensão do problema e interpretar a solução.

ANEXO B - Prova de Lápis Final (Problemas)

A avaliação final estava relacionada com a etapa da linguagem interna do processo de assimilação. Os problemas apresentavam uma complexidade elevada, quando comparados com as questões das provas anteriores. Pois compunham problemas de todo o conteúdo estudado na disciplina. Abaixo encontram-se os problemas que foram aplicados nesta avaliação.

Pergunta 1: Uma população que cresce exponencialmente satisfaz a equação $P(A, K, t) = Ae^{kt}$, onde P é a população no instante t , A é a população inicial (para $t = 0$) e K é a taxa de crescimento relativa (per capita). A população de um certo país é atualmente de 5 milhões de habitantes e está crescendo à taxa de 3% ao ano. Qual será a população daqui a 7 anos?

Pergunta 2: Explique por que cada função é contínua ou descontínua.

- A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
- A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
- O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

Pergunta 3: Suponhamos que a quantidade de batata demandada por semana (em kg) num supermercado seja função do seu preço unitário x (por kg) e do preço unitário de arroz y (por kg), segundo a relação $q = f(x, y) = 1000 - 2x^2 + 15y$. Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40)$. Justifique sua resposta.

Pergunta 4: CIRCULAÇÃO DO SANGUE: A passagem de sangue de uma artéria para um capilar é dada pela expressão $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y - z} \text{ cm}^3/\text{s}$ onde c é uma constante positiva, x é o diâmetro do capilar, y é a pressão na artéria e z é a pressão no capilar. Qual é a expressão da taxa de variação da vazão de sangue com a pressão no capilar, supondo que a pressão na artéria e o diâmetro do capilar permanecem constantes? A taxa é crescente ou decrescente?

Pergunta 5: PRODUTIVIDADE MARGINAL: Em uma certa fábrica, a produção é $Q = 120k^{1/2}L^{1/3}$, unidades, onde k é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume da mão de obra em homens-horas.

- Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial L^2$ e explique o que significa em termos econômicos.
- Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial K^2$ e explique o que significa em termos econômicos.

Pergunta 6: O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v ; portanto podemos escrever $W = f(T, v)$.

		Velocidade do vento (km/h)						
		v	20	30	40	50	60	70
Temperatura real (°C)	T	-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23
	-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30	
	-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37	
	-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44	

Use a Tabela para determinar a aproximação linear da função sensação térmica quando T estiver a -15°C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime também quando a temperatura estiver a -17°C e a rapidez do vento for de 55 km/h.

Pergunta 7: Uma companhia foi contratada para fabricar 10.000 caixotes de madeira, fechados, tendo dimensões de 3 m, 4 m e 5 m. O custo da madeira a ser usada é de \$ 3 por metro quadrado. Se a máquina usada para cortar os pedaços de madeira tiver um erro possível de 0,5 cm em cada dimensão, ache, aproximadamente, usando a diferencial total, o erro máximo possível no custo estimado da madeira. Justifique sua resposta.

Pergunta 8: A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa 0,05 KPa/s e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Ache a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 KPa e a temperatura é 320 K.

Pergunta 9: A temperatura em cada ponto de uma placa de metal é dada por

$$T(x, y) = \frac{16}{1 + x^2 + 2y^2}$$

- (a) Encontre a equação da isoterma que passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e o gradiente neste ponto.
- (b) Se uma formiga está no ponto P , qual direção e sentido ela deve andar de modo que a temperatura tenha sua menor taxa de variação? Qual é esta taxa?
- (c) Se a formiga se mover na direção do vetor $v = (-3, 4)$, ela estará esquentando ou esfriando? Qual a taxa?
- (d) Se a formiga começa a se mover de modo que sua posição em cada instante seja dada por $r(t) = (\sqrt{1+t}, 1+2t)$, qual a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo que a formiga sofre 3 segundos depois?

Pergunta 10: Uma loja de camisas de tênis vende dois modelos, um assinado por Roger Federer e outro por Rafael Nadal. O dono da loja compra os dois modelos pelo mesmo preço, R\$ 50,00, e estima que, se as camisetas Federer forem vendidas por x reais a unidade e as camisetas Nadal y reais a unidade, os fregueses comprarão $40 - 50x + 40y$ camisetas Federer e $20 + 60x - 70y$ camisetas Nadal por dia. Quanto o dono da loja deve cobrar pelas camisas para obter o maior lucro possível?

ANEXO C – Ementa da Disciplina de Cálculo III

CÁLCULO III			
Categoria	Obrigatória (x) Eletiva () Optativa Livre()		Semestre
Modalidade	Presencial () Semi-Presencial () A distância (x)		5º
Carga Horária		PRÉ-REQUISITO	
Total	Teórica	Prática	Cálculo II
75h			
OBJETIVOS			
EMENTA			
Funções reais de várias variáveis, conjuntos de níveis, limites e continuidade; derivadas parciais; diferenciabilidade; a diferencial como uma aproximação linear; Gradiente, plano tangente e reta normal, Regra da Cadeia, Derivadas parciais de ordens superiores, Formas locais e Derivação implícita, Derivadas direcionais, Interpretação geométrica do gradiente, Pontos críticos – Máximos e Mínimos, Pontos extremos locais, Multiplicadores de Lagrange, Funções vetoriais de várias variáveis, conjuntos de nível, Funções do plano no plano, Parametrizações de superfícies – funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , Funções de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 vistas como sistemas dinâmicos, Limite e continuidade, Derivadas parciais e a matriz jacobiana, Regra da Cadeia, Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita.			
PROGRAMA			
AVALIAÇÃO DO ENSINO – APRENDIZAGEM			
CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO			
Resolução Nº 015/2006 – CEPE, de 19 de dezembro de 2006.			
BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA			
1. Básica: ÁVILA, G.S.S. Cálculo. Livros Técnicos e Científicos, Vol. 1.2. SWOKOWSKI. Cálculo com Geometria Analítica, Makron Books, vol 1.2. 2. Complementar: GUIDORIZZI, H. Um curso de cálculo diferencial e integral, Vol. 1.2., Livros Técnicos e Científicos. BUTKOV, E – Física Matemática –Ed Guanabara Dois			

ANEXO D - Solução dos Problemas do Nível de Partida

Problema 01:

Solução:

a)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4,9(x+h)^2 - 4,9x^2}{h} \\
 &= \frac{4,9(x^2 + 2xh + h^2) - 4,9x^2}{h} \\
 &= \frac{4,9x^2 + 9,8xh + 4,9h^2 - 4,9x^2}{h} \\
 &= \frac{9,8xh + 4,9h^2}{h} \\
 &= 9,8xh + 4,9h^2 \\
 &= 9,8x
 \end{aligned}$$

ou

a)

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot 4,9x^{2-1} \\
 &= 9,8x^1
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot 2x^{2-1} - 1 \cdot 3x^{1-1} - 0 \\
 &= 4x^1 - 3 \cdot 1 \\
 &= 4x - 3 \\
 &= 4 \cdot 0 - 3 \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 &= 4 \cdot 6x^{4-1} - 3 \cdot 7x^{3-1} + 1 \cdot 2x^{1-1} + 0 \\
 &= 24x^3 - 21x^2 + 2
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 y &= 5u^2 + u - 1 = 10u + 1, \quad u = 3x + 1 = 3 \\
 y' &= [10u + 1] \cdot 3 \\
 &= [10(3x + 1) + 1] \cdot 3 \\
 &= [30x + 10 + 1] \cdot 3 \\
 &= 90x + 33
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{u^2} = u^{-2}, \quad u = 2x + 3 \\
 y' &= -2u^{-3} \cdot 2 \\
 &= \frac{-4}{u^3} = \frac{-4}{(2x+3)^3}
 \end{aligned}$$

Problema 02:

Solução:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{[-400(x+h)^2 + 6.800(x+h) - 12.000] - [-400x^2 + 6.800x - 12.000]}{h} \\
 &= \frac{[-400(x^2 + 2xh + h^2) + 6.800x + 6.800h - 12.000] + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \frac{-400x^2 - 800xh - 400h^2 + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \frac{-800xh - 400h^2 + 6.800h}{h} \\
 &= -800x - 400h + 6.800
 \end{aligned}$$

$$= -800x + 6.800$$

ou

$$f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -400(2x^1) + 6.800(1x^0) - 0 \\ &= -800x + 6.800 \end{aligned}$$

Assim, quando o nível de produção é $x = 9$ (9.000 unidades), o lucro está variando a uma taxa de

$$f'(9) = -800(9) + 6.800 = -400 \text{ reais por mil unidades.}$$

$f'(9) = -400$, o que significa que a inclinação da reta tangente à curva $y = P(x)$ é *para baixo no ponto Q*, onde $x = 9$. Isto significa que, para um nível de produção de 9.000 unidades, o lucro diminui quando a produção aumenta.

Problema 03:

Solução:

a) O lucro marginal é dado pela derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,0035(3x^2) + 0,07(2x) + 25 \\ &= -0,0105x^2 + 0,14x + 25 \end{aligned}$$

b) Os lucros marginais para $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.

$$f'(10) = 0,0105(10)^2 + 0,14(10) + 25 = 25,35$$

$$f'(50) = 0,0105(50)^2 + 0,14(50) + 25 = 5,75$$

$$f'(80) = -0,0105(80)^2 + 0,14(80) + 25 = -31$$

c) O fato de que $P'(10) = 25,35$ significa que um aumento de 1 unidade no nível de produção de 10 para 11 centenas de câmeras aumenta o lucro em aproximadamente 25,35 milhares de reais (R\$ 25.350,00), o que justifica um esforço do fabricante para aumentar a produção. Por outro lado, como $P'(50) = 5,75$, o aumento do nível de produção de 50 para 51 unidades aumenta o lucro em apenas R\$ 5.750,00, o que talvez não seja um incentivo suficiente para aumentar a produção. Finalmente, como $P'(80) = -31$, um número negativo, aumentar a produção de 80 para 81 unidades resultaria em uma redução de R\$ 31.000,00 no lucro da empresa. Nesse caso, o fabricante deveria considerar seriamente a possibilidade de reduzir a produção.

Problema 04:

Solução:

a) O custo marginal é $C'(x) = \frac{x}{4} + 3$. Como x unidades do produto são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)\frac{1}{3}$ reais, a receita total é

$$R(x) = (\text{número de unidades vendidas})(\text{preço unitário})$$

$$= xp(x) = x \left[\frac{1}{3} (75 - x) \right] = 25x - \frac{1}{3}x^2$$

A receita marginal é

$$R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$$

b) O custo para produzir a nona unidade é igual à variação do custo quando x aumenta de 8 para 9 e pode ser estimado pelo custo marginal

$$C'(8) = \frac{1}{4}(8) + 3 = \text{R\$ } 5,00$$

c) O custo real para produzir a nona unidade é

$$C(9) - C(8) = \text{R\$ } 5,13 \text{ que não é muito diferente do custo marginal } C'(8) = \text{R\$ } 5,00.$$

d) A receita obtida com a venda da nona unidade pode ser estimada pela receita marginal

$$R'(8) = 25 - \frac{2}{3}(8) = \text{R\$ } 19,67$$

e) A receita real obtida com a venda da nona unidade é

$$R(9) - (8) = R\$ 19,33$$

ANEXO E - Solução dos Problemas da Avaliação Formativa

Problema 01: De acordo com a definição calcule a derivada parcial em relação a x e y

a) $f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + 5x$

Solução:

$$f_x(x, y) = 15x^2 - 4xy + 5$$

$$= -2x^2$$

Problema 02: ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO É dada pela expressão empírica

$S(W, H) = 0,0072W^{0,425}H^{0,725}$, onde W (Kg) e H (cm), são, respectivamente, o peso e a altura da pessoa. No momento, uma certa criança pesa 34Kg e tem 1 m e 20 cm de altura.

- Determine os dados do problema.
- Calcule as derivadas parciais $S_w(50,163)$ e $S_H(50, 163)$ e interprete-as como taxas de variação.
- Estime qual será a variação da área superficial se a criança engordar 1 Kg e altura permanecer inalterada.

Solução:

a)

- A criança pesa 34 kg
- A criança tem 1 m e 20 cm de altura.

O objetivo do problema é estimar qual será a variação da área superficial se a criança engorda 1 kg e altura permanecer inalterada.

b)

W (kg) → representa o peso de uma pessoa.

H (cm) → representa a altura de uma pessoa.

$$S(W, H) = 0,0072 w^{0,425} \cdot h^{0,725}$$

$$S_w(W, H) = 0,425 \cdot 0,0072 w^{0,425-1} \cdot H^{0,725} = 0,00306 W^{-0,575} \cdot H^{0,725}$$

$$S_H(W, H) = 0,072 W^{0,425} \cdot 0,725 H^{0,725-1} = 0,00522 W^{0,425} \cdot H^{-0,275}$$

$$S_w(50,163) = 0,00306 W^{-0,575} \cdot H^{0,725} = 0,00306 \cdot (50)^{-0,575} \cdot (163)^{0,725} = 0,01296$$

$$S_H(50,163) = 0,00522 \cdot (50)^{0,425} \cdot (163)^{-0,275} = 0,00678$$

c)

$$S_w(51,163) = 0,0036 \cdot (51)^{-0,575} \cdot (163)^{0,725} = 0,01507$$

$$S_w(34, 1,20) = 0,00306 \cdot (34)^{-0,575} \cdot (1,20)^{0,725} = 0,00045$$

$$S_w(35, 1, 20) = 0,00306 \cdot (35)^{-0,575} \cdot (1,20)^{0,725} = 0,00045$$

Realizando esse processo na função dada inicialmente $S(W, H) = 0,0072 w^{0,425} \cdot h^{0,725}$

$$S(34, 1,20) = 0,0072 \cdot (34)^{0,425} \cdot (1,20)^{0,725} = 0,03678$$

$$S(35, 1,20) = 0,0072. (35)^{0,425} \cdot (1,20)^{0,725} = 0,03723$$

Então, a variação exata é

$$\Delta S = S(35, 1,20) - S(34, 1,20) = 0,03723 - 0,03678 = 0,00045$$

Obs: Comparado à variação exata com a estimada percebemos que não houve erro, o resultado foi o mesmo 0,00045.

Problema 03: PRODUTIVIDADE MARGINAL Um fabricante estima que a produção anual de uma certa fábrica é dada por $Q(K, L) = 20K^{0,3}L^{0,7}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão de obra em homens-horas.

- Determinar a produtividade marginal do capital, Q_K , e a produtividade marginal de mão de obra, Q_L . Para um capital imobilizado de R\$ 630.000,00 e um volume de mão de obra de 830 homens-horas.
- Para aumentar rapidamente a produtividade, o fabricante deve aumentar o investimento ou a mão de obra?

Solução:

a)

$$Q_K(K, L) = 20 \cdot (0,3)K^{0,3-1} \cdot L^{0,7} = 6K^{-0,7} \cdot L^{0,7}$$

$$Q_L(K, L) = 20K^{0,3} \cdot 0,7 L^{0,7-1} = 14K^{0,3} L^{-0,3}$$

$$K = 630 \text{ (R\$ 630.000,00)} \text{ e } L = 830$$

$$Q_K(630, 830) = 6 \cdot (630)^{-0,7} \cdot (830)^{0,7} \approx 7,27$$

$$Q_L(630, 830) = 14 \cdot (630)^{0,3} \cdot (830)^{-0,3} \approx 12,88$$

b)

De acordo com o resultado do item (a), um aumento de uma unidade no capital imobilizado (R\$ 1.000,00) resulta em um aumento da produção de 7,27 unidades, que é menor que o aumento de 12,88 unidades resultante de um aumento de uma unidade no volume da mão de obra. Assim, o fabricante deve aumentar o volume de mão de obra para aumentar rapidamente a produção.

Problema 04: Estima-se que a produção semanal de uma fábrica é dada pela função $Q(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, onde x é o número de operários especializados e y o número de operários não especializados utilizados no trabalho. No momento, a mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados e 60 operários não especializados. Use a análise marginal para estimar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

- Determine os dados do problema. Qual o objetivo do problema?
- Determine as variáveis e construir a função que envolve duas variáveis.
- Solucione o modelo matemático.

d) Interprete a solução.

Solução:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200(x+h) + 500y + (x+h)^2y - (x+h)^3 - y^2 - (1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + (x^2 + 2xh + h^2)y - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + x^2y + 2xhy + h^2y - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200h + 2xhy + h^2y - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 1200 + \lim_{h \rightarrow 0} 2xy + \lim_{h \rightarrow 0} hy - \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 3xh - \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \\
 &= 1200 + 2xy + 0 - 3x^2 - 0 - 0 \\
 &= 1200 + 2xy - 3x^2
 \end{aligned}$$

Em particular, se o número de operários especializados aumentar de 30 para 31 e o número de operários não especializados permanecer constante em 60, a variação da produção será aproximadamente

$$f_x(30, 60) = 1.200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2.100 \text{ unidades.}$$

Com o objetivo de chegarmos ao resultado da variação exata, substituímos os valores dados na função

$$f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2.$$

$$f(31, 60) = 1.200(31) + 500(60) + (31)^2(60) - (31)^3 - (60)^2$$

$$f(31, 60) = 91469$$

e

$$f(30, 60) = 1.200(30) + 500(60) + (30)^2(60) - (30)^3 - (60)^2$$

$$f(30, 60) = 89400$$

Então, a variação exata é

$$\Delta f = f(31, 60) - f(30, 60) = 91469 - 89400 = 2069.$$

Comparando a variação exata com a variação estimada pela derivada parcial, concluímos que obtivemos uma aproximação com erro muito pequeno.

ANEXO F - Solução dos Problemas da Avaliação Final

Problema 01: Uma população que cresce exponencialmente satisfaz a equação $P(A, K, t) = Ae^{kt}$, onde P é a população no instante t , A é a população inicial (para $t = 0$) e K é a taxa de crescimento relativa (per capita). A população de um certo país é atualmente de 5 milhões de habitantes e está crescendo à taxa de 3% ao ano. Qual será a população daqui a 7 anos?

Solução:

P = População em milhões de habitantes

t = instante (tempo) 7 anos .

A = População inicial 5000 000.

$K = 0,03$ (crescimento anual de 3%)

$P(A, K, t) = Ae^{kt}$

$P(5, 0, 03, 7) = 5 \cdot 10^6 \cdot e^{0,03 \cdot (7)}$

$P(5, 0, 03, 7) = 5 \cdot 10^6 \cdot e^{0,21}$

$P(5, 0, 03, 7) = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,2367806$

$P(5, 0, 03, 7) = 6.168.390,3$ habitantes

$P(5, 0, 03, 7) \approx 6.200.000$ habitantes

Assim, daqui a 7 anos a população será aproximadamente de 6.200.000 habitantes

Problema 02: Suponhamos que a quantidade de batata demandada por semana (em kg) num supermercado seja função do seu preço unitário x (por kg) e do preço unitário de arroz y (por kg), segundo a relação $q = f(x, y) = 1000 - 2x^2 + 15y$. Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40)$.

Justifique sua resposta.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(30 + \Delta x, 40) - f(30, 40)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1000 - 2(30 + \Delta x)^2 + 15 \cdot 40 - 1000 + 2 \cdot 30^2 - 15 \cdot 40}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-120\Delta x - 2\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-120 - 2\Delta x) = -120$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(30, 40) = -120$ representa aproximadamente $\frac{\Delta f}{\Delta x}(30, 40)$ para pequenos valores de Δx . Assim, se admitirmos $\Delta x = 1$, teremos $\Delta f = -120$, ou seja, a um aumento unitário no preço do kg de batata (de 30 para 31) corresponde uma diminuição da demanda de batata de 120 kg aproximadamente, mantidos o preço do kg de arroz de 40.

Calculemos agora $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(30, 40 + \Delta y) - f(30, 40)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1000 - 2 \cdot 30^2 + 15 \cdot (40 + \Delta y) - 1000 + 2 \cdot 30^2 - 15 \cdot 40}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{15 \cdot \Delta y}{\Delta y} = 15.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial y}(30, 40) = 15$ representa aproximadamente $\frac{\Delta f}{\Delta y}(30, 40)$ para pequenos valores de Δy . Se admitirmos $\Delta y = 1$, teremos $\Delta f = 15$, ou seja, a um aumento unitário no preço do kg de arroz (de 40 para 41) corresponde um aumento na demanda de batata em 15 kg aproximadamente, mantido o preço do kg de batata em 30.

Problema 03: CIRCULAÇÃO DO SANGUE: A passagem de sangue de uma artéria para um capilar é dada pela expressão $F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4} \sqrt{y - z} \text{ cm}^3/\text{s}$ onde c é uma constante positiva, x é o diâmetro do capilar, y é a pressão na artéria e z é a pressão no capilar. Qual é a

expressão da taxa de variação da vazão de sangue com a pressão no capilar, supondo que a pressão na artéria e o diâmetro do capilar permanecem constantes? A taxa é crescente ou decrescente?

Solução:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{C\pi x^2}{4} \cdot \sqrt{y-z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{C\pi x^2}{4} \cdot \sqrt{y-z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{C\pi x^2}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{C\pi x^2}{8\sqrt{y-z}}$$

Desta forma a demanda é decrescente uma vez que $F(x, y, z) < 0$, ou seja, a demanda de circulação do sangue em função da constante da pressão na artéria e o diâmetro capilar.

Problema 04: PRODUTIVIDADE MARGINAL: Em uma certa fábrica, a produção é $Q = 120k^{1/2}L^{1/3}$, unidades, onde k é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume da mão de obra em homens-horas.

a) Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial L^2$ e explique o que significa em termos econômicos.

b) Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 Q / \partial K^2$ e explique o que significa em termos econômicos.

Solução:

a)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = (120 \cdot \frac{1}{3}) k^{1/2} \cdot L^{1/3-1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 40 \cdot K^{1/2} \cdot K^{-2/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 40 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) K^{1/2} \cdot L^{-2/3-1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{-80}{3} K^{1/2} \cdot L^{-5/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{-80}{3} \cdot \frac{K^{1/2}}{L^{5/3}}$$

Ou seja $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$, mostra que o nível do capital imobilizado é negativo, ou seja, o efeito sobre a produção pelo aumento de homem-hora em volume de mão-de-obra é maior quando reduz a mão-de-obra ao ser comparado com o aumento de mão-de-obra.

b)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) K^{1/2-1} \cdot L^{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 60 K^{-1/2} \cdot L^{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot K^{-1/2-1} \cdot L^{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -30 \cdot K^{-3/2} \cdot L^{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -30 \frac{L^{1/3}}{K^{3/2}}$$

Ou seja: $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$

O sinal da derivada é negativo $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$ para um volume de mão-de-obra e seu efeito sobre a produção, como por exemplo com um aumento de R\$ 1000,00 no aumento do capital imobilizado o capital significa que a fábrica teria maior prejuízo.