



**Sequência Didática: A Atividade de
Situações Problema e a Formação por
Etapas Mentais de Galperin na
Aprendizagem de Derivadas Parciais**

Priscila Feitoza Bezerra Sampaio

Copyright © 2015 by Priscila Feitoza Bezerra Sampaio.

Todos os direitos reservados. Está autorizada a reprodução total ou parcial deste trabalho, desde que seja informada a **fonte**.

Pró – Reitoria de Pesquisa e Pós – Graduação – PROPES
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências – PPGEC

Organização

Priscila Feitoza Bezerra Sampaio
Dsc. Héctor José Garcia Mendoza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

Sequência didática: a atividade de situações problema e a formação por etapas mentais de Galperin na aprendizagem de derivadas parciais. / sob a coordenação de Priscila Feitoza Bezerra Sampaio e Héctor José Garcia Mendoza. Boa Vista – RR: UERR, 2015

24f.; il Color; 21 cm.

1. Atividade se situação problema. 2. Teoria de formação por etapas das ações mentais. 3. Ensino aprendizagem. 4. Derivadas parciais. I. Título.

UERR. Prod. Mestrado/2015

CDD 510.7 (19. ed.)

Sobre os autores:

Priscila Feitoza Bezerra Sampaio:

Mestre em Ensino de Ciências pelo Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima - UERR, (2015). Especialista em Educação a Distância pela Universidade Federal de Roraima - UFRR, (2010). Licenciada em Matemática pela UFRR. Graduada em Administração de Empresas pela Faculdade Atual da Amazônia, (2006). É Tutora a distância do Curso de Licenciatura Plena em Matemática a Distância da UFRR. É Professora horista do Curso de Matemática da UERR. Atuou como professora de matemática do quadro temporário na rede pública estadual de Boa Vista/RR, (2012/2013). Professora voluntária de Instrumental Matemática II no Instituto Insikiran de Formação Superior Indígena – INSIKIRAN/UFRR, (2012). Tutora a distância no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Roraima - IFRR/UAB, (2011). Tutora a distância do Curso de Capacitação de Profissionais em Educação a Distância da Universidade Federal de Roraima - UFRR/UAB (2010).

Hector José Garcia Mendoza:

Bacharel em Matemática pela Universidade Central Marta Abreu de Las Villas (UCLV), Cuba; Mestrado em Informática Educativa pela Universidade de Matanzas Camilo Cienfuegos (UMCC), Cuba e Doutorado em Educação do programa Desenvolvimento Curricular, Organizativo e Profissionalização Docente: Perspectivas Didáticas na Universidade de Jaén (UJAEN), Espanha. Revalidado pelo programa de Doutorado em Educação da Universidade Federal de Rio Grande do Norte (UFRN). Ex-professor dos departamentos de Matemática nas universidades cubanas Instituto Superior Pedagógico Juan Marinello (ISJPM) e Universidade de Matanzas Camilo Cienfuegos (UMCC). Professor Associado I da Universidade Federal de Roraima (UFRR) atuando na Licenciatura e Bacharelado em Matemática, coordenador do Subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e professor permanente do Programa Nacional de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF). Na Universidade Estadual de Roraima (UERR) atua como professor permanente dos mestrados, profissionalizante em Ensino de Ciência e acadêmico em Educação. Professor do programa de doutorado Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática REAMEC. Pesquisador no tema A Resolução de Problema em Matemática como Metodologia de Ensino, fundamentada nas teorias da Atividade de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin e a Aprendizagem Significativa de Ausubel.

derivadas na disciplina de cálculo III da licenciatura em matemática a distância. As características das ações de maneira geral possibilitaram a realização da análise da assimilação do conceito de derivadas parciais pelos estudantes.

Desse modo, pode-se afirmar que a Atividade de Situações Problemas, Atividade de Situações Problemas da Didática em Derivadas Parciais e a Teoria de Formação Por Etapas das Ações Mentais na resolução de problemas matemáticos permitiram obter dados significativos na pesquisa. Porém, este campo de estudo é bastante abrangente, o que evidencia que existe um caminho aberto para que trabalhos futuros sejam realizados pelos pesquisadores desta temática, uma vez que possui dados significativos, que podem ser expandidos, aprofundados, como também, a utilização do modelo desta pesquisa pode ser adaptado a outros conteúdos matemáticos, permitindo alcançar resultados ainda mais satisfatórios, quanto ao uso da ASP e das etapas das ações mentais no conteúdo matemático visando o processo de ensino-aprendizagem. Assim poderá contribuir ainda mais com os pesquisadores das áreas de ensino.

Assim, a investigação descrita visa contribuir com a realização de estudos envolvendo a resolução de problemas na área das ciências Exatas e/ou aplicadas e Educação. Portanto, recomenda-se esta pesquisa especialmente aos professores de matemática que atuam na educação a distância e ensino presencial, como também aos que atuam no campo da ciência, os quais podem embasar suas aulas e estudos de pesquisa por meio do produto final elaborado neste trabalho “sequência didática”, o qual apresenta a sugestão de elaboração de aulas no contexto da resolução de problemas em matemática, na busca de contribuir com a prática do professor no ensino de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2008. 344 p.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. 10ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.

HUGHES-HALLETT et al. **Cálculo de uma variável** [Tradução Rafael José Iorio Júnior, Valéria de Magalhães Iorio], Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MAURA, V. G. et al. **Psicología para educadores**. Cuba: Pueblo y Educación, 1995.

MENDOZA, H. J. G. **Estudio del efecto del sistema de acciones en el proceso de aprendizaje de los alumnos en la actividad de situaciones problemas em Matemática, en la asignatura de Álgebra Lineal, en el contexto de la Facultad Actual de la Amazonia**. Teses (doutorado em psicopedagogia). Faculdade de Humanidade e Ciência na Educação. Universidade de Jaén, 2009a.

_____. **Didática da Matemática: A Atividade de Situações Problema em Matemática; A Atividade de Situações Problema da Didática e a Resolução de Situações Problema da Didática da Matemática**. Boa Vista: MENDOZA, Héctor José García, 2010a. 18.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. **Formación del Método de la Actividad de Situaciones Problema em Matemática**, 2010.

_____. **Sistema de ações para melhorar o desempenho dos alunos na atividade de situações problema em matemática**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, 2011.

_____. **A Contribuição de Galperin na Avaliação de Provas de Lápis e Papel de Sistemas de Equações Lineares**. Revista de Psicopedagogia, Psicologia Escolar e Educação, v. XII, p. 289-323, 2013.

_____. **Formação por Etapas das Ações Mentais na Atividade de Situações Problema em Matemática**, 2010.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. **A Didática da Matemática Fundamentada na Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin**. In: NUNEZ, Isaura Beltrán; Ramalho, Betânia Late. Ya Galperin e a Teoria da Assimilação Mental por Etapas: pesquisas e experiências para o ensino inovador, no prelo 2015.

MENDOZA, H. J. G.; TINTORER, O. D. A Atividade de Situações Problema em Matemática. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. **Aprendizagem desenvolvimento: Implicações para e do ensino**. EDUFU, no prelo 2015.

NUÑEZ, I. B.; OLIVEIRA, M. V. F. P. Ya. Galperin: a vida e a obra do criador da teoria de formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 283-313.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. 5. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

RIBEIRO, R. P. **O Processo de Aprendizagem de Professores do Ensino Fundamental: apropriação da habilidade de planejar situações de ensino de conceitos**. 2008. p. 230. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

TALÍZINA, N. **Psicología de La Enseñanza**. Moscú: Progreso, 1988.

_____. **Manual de Psicología Pedagógica**. México, DF: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2000.

TINTORER, O. D. **A Resolução de Problemas em Educação em Ciências e Matemática**. Boa Vista, [2013]. 22 slides, color.

_____. A Didática da Matemática como Disciplina na Formação de Professores. **V Congresso Internacional de Ensino da Matemática**, Canoas, p. 1-7, out. 2010.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA. Centro de Ciências e Tecnologia Departamento de Matemática. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Matemática a Distância**. Boa Vista, 2013. 73p.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: planejamento e métodos**. Tradução Ana Thorell. 4ª ed. – Porto Alegre: Bookman, 2010.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, defende-se a ideia de que no ensino é importante utilizar teorias vinculadas ao conteúdo que se propõe ministrar aos estudantes. Entretanto, o que se percebe frequentemente é a resistência desta vinculação pelos professores que desconhecem esta face da ciência na aprendizagem. Alguns professores fazem uso de ferramentas da didática relacionadas ao conteúdo das disciplinas ministradas de forma implícita, como no caso da matemática, sem se dar conta de seu envolvimento neste contexto. Desse modo, para que a aprendizagem dos estudantes ocorra com qualidade e o trabalho do professor seja satisfatório, se faz necessário buscar uma didática fundamentada em teorias de aprendizagem que permitam fazer confluência com as diversas áreas da matemática. Como por exemplo, o professor pode fazer uso de problemas matemáticos no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, levando-os a estudar com um olhar voltado para a realidade do mundo que o cerca, por meio de problemas que os ajude preparar e resolver as circunstâncias do seu dia a dia.

Neste sentido, a Atividade de Situações Problema (ASP) e as etapas de formação das ações mentais apresentam sua contribuição no ensino-aprendizagem por meio de problemas contextualizados. Desta forma, na busca de contribuir com a educação a distância, levando-se em conta, as dificuldades que enfrentam os estudantes desta modalidade de ensino, devido o processo de ensino aprendizagem ocorrer na maior parte do tempo de maneira independente e a participação do professor se apresentar de forma menos incisiva, caracterizando-se assim, um distanciamento na relação direta professor-aluno.

A pesquisa foi realizada dentro do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal de Roraima de forma a cooperar com a qualidade do conhecimento da educação nesta modalidade. Sendo assim, o Curso de Licenciatura Plena em Matemática a Distância utiliza a tecnologia de forma a favorecer a educação, dando significado a educação de base do Estado de Roraima. A qual tem como finalidade qualificar e ampliar a quantidade de professores licenciados em matemática e assim atender a demanda das escolas.

A pesquisa encontra-se fundamentada nos estudos da teoria sócio-cultural de Vygotsky e seus colaboradores, o qual afirma que o desenvolvimento de assimilação da *psique* do homem é dado pela experiência social. Leóntiev converteu a atividade que relaciona o sujeito com o mundo

em objeto da psicologia, identificando o conceito de atividade, ação e operação. A partir dessas ideias Galperin desenvolveu a teoria de formação por etapas das ações mentais, todo esse contexto de teorias surgiu no progresso da ciência pedagógica soviética. Neste contexto a investigação tem como objeto o conteúdo de derivadas parciais que a partir da atividade dividida em etapas qualitativas fazendo uso da resolução de problemas matemáticos, é internalizada pelos sujeitos, os estudantes de Licenciatura em Matemática.

A Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin abarcou a realização de um planejamento adequado à realidade dos estudantes por meio da Base Orientadora da Ação. Nesse sentido, as etapas mentais estiveram presentes durante todo desenvolvimento das aulas, o qual os estudantes foram orientados pelo professor de maneira a percorrer as cinco etapas mentais da externa até a internalização do conteúdo estudado.

A Teoria Geral da Direção em sua forma cíclica trouxe contribuição neste trabalho com a assimilação da aprendizagem pelos estudantes, conduzida pela metodologia do professor no processo de ensino aprendizagem.

A ASP em Matemática compôs também a fundamentação da pesquisa em questão, por se tratar de uma estratégia de ensino, a qual sua utilização foi de suma importância no processo de ensino-aprendizagem, de forma a detectar a aprendizagem dos estudantes, visto que, por meio das ações e operações da ASP, os mesmos foram ensinados, através do estudo da matemática por meio de problemas, pois esta estratégia possibilitou a compreensão do problema, a construção do modelo, a solução do modelo e a interpretação da solução do modelo matemático.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu dentro da disciplina de Cálculo III, no conteúdo de derivadas parciais e suas aplicações. A Atividade de Situação Problema da Didática contribuiu para a apresentação de uma estrutura na qual se planejou a disciplina e os planos de aulas de forma adequada com os três momentos desta didática: identificar a Situação Problema da Didática da Matemática no conteúdo de derivadas parciais; planejar e construir a Atividade de Situações Problema, possibilitando assim a elaboração de uma sequência didática no processo de ensino-aprendizagem.

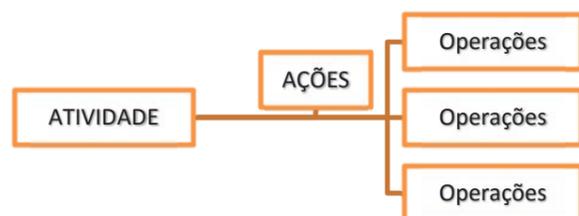
1. TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS

1.1 Conceito de Atividade

A atividade se constitui por processos pelos quais o indivíduo, se relaciona com a realidade, como resposta a suas necessidades, adotando determinada atividade em direção a mesma. A interação sujeito-objeto acontece em forma de atividade, é neste momento que se origina o reflexo psíquico que faz o intermédio desta interação (MAURA et al., 1995).

As ações pelas quais ocorre a atividade não decorrem de forma isolada das condições das quais a atividade é produzida. Desse modo, sendo a ação um processo que visa alcançar um objetivo ou fim consciente, as vias, procedimentos, métodos, enfim, a maneira como esse processo se realizará variará de acordo com as condições pelas quais o sujeito enfrentará para alcançar o objetivo. O (Esquema 1) “Essas vias, procedimentos, métodos, formas mediante as quais a ação transcorre com dependência das condições em que se deve alcançar o objetivo ou fim, se denominam operações” (MAURA et al., 1995, p. 94).

Esquema 1 - O Desdobramento da Atividade



Fonte: Elaborada pelo autor

Leóntiev converteu a atividade que relaciona o sujeito com o mundo em objeto da psicologia, dedicou-se ao estudo da estrutura e da atividade. Discriminou o conceito de atividade, ação e operação. Chegando à conclusão de que os principais componentes de algumas atividades humanas os constituem nas ações que as realizam, as ações são chamadas de processos subordinados a um objetivo percepção, que recebe orientação e as operações são as instruções por meio do qual se realiza a ação. Essas “operações são formadas nas ações neste caso o objeto da ação forma parte de outra ação como condição de seu cumprimento, a primeira ação se transforma em método de realização da segunda, em uma operação consciente” (TALÍZINA, 1988, p. 24).

1.2 Características das Ações

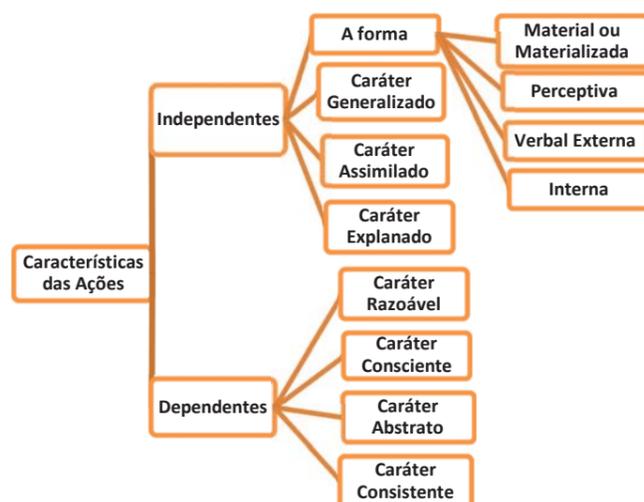
A ação apresenta características independentes (primárias) que se reportam: à forma, ao caráter generalizado, ao caráter explanado e ao caráter assimilado e as dependentes (Secundárias) em caráter razoável, consciente, abstrato e consistente. As características das ações encontram-se destacadas no (Esquema 2).

A forma da ação é caracterizada pela classe de apropriação do sujeito enquanto realiza a ação, sendo, a interiorização da ação executada pelo homem. Para a ocorrência deste percurso é necessário desempenhar quatro formas de ação: a material, perceptiva, a verbal externa e mental.

Nas características das ações independentes, destaca-se, a forma com quatro desdobramentos, pelos quais a ação passa da sua forma externa para interna (TALÍZINA, 1988):

- *material* ou *materializada* são as ações iniciais que serão colocadas em prática, sua particularidade é mostrada ao sujeito através de objetos reais (forma material) ou em formato de modelos, esquemas, desenhos (forma materializada);
- *perceptiva* aborda os sentidos onde pode-se ver e ouvir, seu surgimento dar-se no resultado da ação material ou materializada;
- *verbal externa* tem como característica a produção, ou seja, o objeto é apresentado pelo sujeito na linguagem oral ou escrita;
- *mental* o sujeito realiza a ação “para si”, está ocorre pela organização de representações, conceitos, operações, que se constitui “para si”. A execução da ação na forma mental apresenta que a ação passou pelo processo de externa a interna.

Esquema 2 – Características das Ações



Fonte: Adaptação de Talízina, 1988.

Como forma de realizar o processo de retroalimentação, esclarecendo as possíveis dúvidas que ainda existiam após a explicação realizada pelo professor, foi elaborada e executada a conclusão do planejamento da seguinte forma:

Conclusões do Plano de Aula

Na finalização da aula se fez necessário realizar uma análise para constatar se os estudantes assimilaram o conteúdo (através de perguntas ou elaboração de um questionário), observando se resolveram corretamente as situações problemas que foram propostas. Após, se auxiliou os estudantes corrigindo com eles os erros encontrados como também tirou-se as possíveis dúvidas, as ideias centrais do assunto foram apresentadas em forma de resumo, reforçando assim os objetivos propostos. Logo em seguida, foi feita uma breve abordagem mostrando a importância das derivadas parciais no cotidiano.

Prosseguindo, foi explicado que o conteúdo de derivadas parciais pode ser aplicado em várias áreas de conhecimento. O que pôde ser percebido na explicação dos problemas acima, que são aplicações da derivada na área da produção.

Por conseguinte, no que se refere ao professor, este teve por meta na aula ministrada avaliar o nível de aprendizagem, através de atividades, indagações e aplicação de questionário que foram propostos aos acadêmicos de cálculo III do Curso de Matemática a distância.

A aula foi realizada com o intuito de preparar os acadêmicos a desenvolver questões de cálculo de taxa de variação, a compreender cálculos de funções com duas variáveis e a diferenciar a derivação parcial em relação a variável x e y . Em todas as aulas o professor buscou sanar todas as dúvidas que surgiam, para que os alunos estivessem aptos a resolver problemas do respectivo assunto.

De modo, para que o assunto de derivadas parciais fosse interiorizado pelos estudantes, foi proposto aos mesmos o seguinte problema: Suponha que $10.000x$ da unidade monetária seja o inventário feito numa loja, y seja o número de balconistas na loja, f seja o lucro semanal da loja e $f = 3.000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$ onde $15 \leq x \leq 25$ e $5 \leq y \leq 12$. No momento, o inventário é de \$ 180.000,00 e existem 8 balconistas.

- a) Ache a taxa de variação instantânea de f por unidade de variação em x , se y permanecer fixo em 8.
- b) Ache a taxa de variação instantânea de f por unidade de variação em y , se x permanecer fixo em 18.

Este problema foi utilizado como alvo de debate em sala. O mesmo engloba o conteúdo dado e por meio deste e outros problemas propostos, os estudantes foram avaliados no processo de ensino aprendizagem.

Por fim, o professor expressa aos estudantes que na próxima aula, seria estudado as derivadas parciais em um problema de economia por intermédio da função Cobb-Douglas. Além disso, foi passada uma lista de exercícios com problemas envolvendo o assunto estudado, para que os estudantes desenvolvessem na prática o conteúdo da aula.

9ª Ação: Preparar os instrumentos do sistema de avaliação.

Nesta ação, assim como na anterior, considerou-se a etapa de formação das ações mentais e os conteúdos matemáticos. Foi preparado os instrumentos do sistema de avaliação que foram as provas de lápis e papel primeiramente, uma diagnóstica, depois uma formativa 1 e por último a avaliação final, os problemas tiveram a forma subjetiva em que se apresentou com frequência o item “Justifique sua resposta”.

A observação direta na sala de aula também foi utilizada para a compreensão do processo de aprendizagem dos estudantes. A observação nas aulas presenciais e no ambiente virtual de aprendizagem possibilitaram a realização de mudanças posteriores nos instrumentos utilizados, quando houve necessidade. A estruturação ocorreu no período de novembro de 2013 até março de 2013, após a intervenção foi executada conforme o planejamento na disciplina de Cálculo III com início no dia 17 de março de 2014.

Contudo, após a coleta de informações por meio dos instrumentos criados para análise, sendo estes provas e guias de observação. Os dados coletados foram analisados, dando origem ao relatório final da pesquisa que evidenciou os resultados alcançados com a aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa se discutiu como se desenvolveu o processo de ensino aprendizagem por meio da aplicação da Atividade de Situações Problema e da teoria de formação por etapas das ações mentais no ensino de derivadas parciais aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD do Polo de Alto Alegre.

A Atividade de Situações Problemas contribuiu positivamente na aprendizagem do Cálculo III, pois seu sistema de quatro ações com suas operações foram necessárias e importantes para que ocorresse a assimilação dos conceitos essenciais de derivadas parciais e suas aplicações, o passo a passo das ações na execução de problemas possibilitaram uma compreensão satisfatória do assunto, permitindo também que fossem identificadas as características das ações de acordo com a Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin.

As etapas das ações mentais foram fundamentais para que os conceitos fossem assimilados pelos estudantes, pois como composição do processo em estudo, estiveram presentes durante todo o desenvolvimento do conteúdo de

Seguindo com o problema, se o número de operários não especializados permanecer constante, a taxa de variação da produção em relação ao número de operários especializados pode ser obtida derivando $f(x, y)$ apenas em relação a x . Isto é, consideramos a função g de uma variável obtida fixando-se a variável $y = k$ na função f , ou seja, $g(x) = f(x, k)$.

A taxa de variação da produção em função do número de operários é dada, portanto, pela derivada da função de uma variável g . Definimos a derivada de g como sendo a derivada parcial de f em relação a x e a representamos pelo símbolo $f_x(x, y)$.

Em símbolos matemáticos, $f_x(x, k) = g'(x)$.

Da mesma forma, mantendo-se o número de operários especializados fixo, então a taxa de variação do número de operários não especializados é dado pela derivada parcial de Q em relação a y . Isto é, mantendo-se x constante, tal variação é obtida derivando-se $f(x, y)$ em relação a y . Essa derivada é representada pelo símbolo $f_y(x, y)$.

III. Solução do modelo matemático

Dada à função: $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, queremos calcular o aumento da produção semanal se aumentarmos o número de operários especializados e mantivermos o número de operários não especializados fixo. Para tal objetivo, devemos derivar parcialmente a função $f(x, y)$ em relação a x , permanecendo y constante.

A partir da função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, obtemos a derivada parcial $f_x(x, y)$ seguindo os seguintes passos:

Visando fixar a noção de derivada parcial, calculamos também $f_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 500(y+h) + x^2(y+h) - x^3 - (y+h)^2 - (1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 500y + 500h + x^2y + x^2h - x^3 - y^2 - 2yh - h^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{500h + x^2h - 2yh - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 500 + \lim_{h \rightarrow 0} x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 2y - \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= 500 + x^2 - 2y \end{aligned}$$

Dessa forma, calculamos a derivada parcial $f_y(x, y)$ que é dada por

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

IV. Interpretação da solução

Seguindo com o problema dado, essa derivada parcial $f_x(x, y) = 1.200 + 2xy - 3x^2$ é a taxa de variação da produção em relação ao número de operários especializados, mantendo o número de operários não especializados constante. Para quaisquer valores de x e y , esta é uma aproximação do número de unidades a mais que serão produzidas por semana se o número de operários especializados aumentar de x para $x+k$, onde k é um número natural, e o número y de operários não especializados permanecer constante. Em particular, se o número de operários especializados aumentar de 30 para 31 e o número de operários não especializados permanecer constante em 60, a variação da produção será aproximadamente $f_x(30, 60) = 1.200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2.100$ unidades.

Com o objetivo de chegarmos ao resultado da variação exata, substituímos os valores dados na função

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200(x+h) + 500y + (x+h)^2y - (x+h)^3 - y^2 - (1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + (x^2 + 2xh + h^2)y - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200x + 1200h + 500y + x^2y + 2xhy + h^2y - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 - y^2 - 1200x - 500y - x^2y + x^3 + y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1200h + 2xhy + h^2y - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1200 + \lim_{h \rightarrow 0} 2xy + \lim_{h \rightarrow 0} hy - \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 3xh - \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \\ &= 1200 + 2xy + 0 - 3x^2 - 0 - 0 \\ &= 1200 + 2xy - 3x^2 \end{aligned}$$

Desse modo, calculamos a derivada parcial $f_x(x, y)$ que é assim denotada:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2 \\ f(31, 60) &= 1.200(31) + 500(60) + (31)^2(60) - (31)^3 - (60)^2 \\ f(31, 60) &= 91469 \text{ e} \\ f(30, 60) &= 1.200(30) + 500(60) + (30)^2(60) - (30)^3 - (60)^2 \\ f(30, 60) &= 89400 \\ \text{Então, a variação exata é} \\ \Delta f &= f(31, 60) - f(30, 60) = 91469 - 89400 = 2069. \end{aligned}$$

Comparando a variação exata com a variação estimada pela derivada parcial, concluímos que obtivemos uma aproximação com erro muito pequeno.

O tipo de atividade de estudo evidencia um sistema de ações que ligada a um motivo concomitante garante a relevância do objeto e da atividade que compõe. “Na teoria dada à imagem da ação e a do meio onde se realiza a ação se unem em um elemento estrutural único sobre cuja base transcorre a direção da ação que é chamada de *base orientadora da ação*” (TALÍZINA, 1988, p. 58).

1.3 A Base Orientadora da Ação

A Base Orientadora da Ação (BOA) é caracterizada por seu grau de generalidade de forma concreta quando se exprime nos casos particulares e os de forma geral baseado nas invariantes, que são as ações usadas para resolver inúmeros problemas. O nível de plenitude é constituído pela maneira que se realiza a orientação sendo completa ou incompleta, seguindo do modo de obtenção do conhecimento pelos estudantes que está definido em preparada, quando o estudante recebe todas as ações de forma completa e elaborada independentemente quando o mesmo terá que encontrar as ações que podem ser realizadas com a ajuda do professor (MENDOZA, 2010).

Dentro da Base Orientadora da Ação, encontra-se inserido o conjunto de regras, que servem de base para o sujeito realizar uma atividade. Desse modo, “o estudante pode construir sistemas de conhecimentos e estabelecer os modelos das ações a executar, visando a realização da atividade assim como a ordem de realização dos componentes da ação: orientação, execução e controle [...]” (NUÑEZ; OLIVEIRA, 2013, p. 299).

Entre os tipos de BOA que mais se destacam, estão a concreta, completa, preparada; generalizada, completa, independente; generalizada, completa e preparada.

1.4 Processo de Assimilação

O trabalho de Galperin está centrado no princípio de que as ações externas contribuem com a representação das ações mentais. Com base neste princípio, Galperin criou a teoria de desenvolvimento psíquico, que foi convertida em uma teoria de ensino apresentando como ideia principal a formação planejada por etapa das ações mentais. Nesse sentido, deve-se levar em consideração que o processo de formação de uma ação inicia com objetos reais ou suas representações, passando para as etapas posteriores até chegar à linguagem interna (RIBEIRO, 2008).

Galperin criou as cinco etapas das ações mentais do processo de assimilação, a motivação se faz presente em todas as etapas, pois a motivação é criada de forma positiva por meio de situações problemas, que levem o estudante a aprender através de problemas reais (TALÍZINA, 1988). As etapas do processo de assimilação são:

- E1:** A elaboração do esquema da BOA;
- E2:** Formação da ação na forma material ou materializada;
- E3:** Formação da ação como verbal externa;
- E4:** Formação da ação na linguagem externa para si;
- E5:** Formação da ação em linguagem interna;

Essas cinco etapas são, apresentadas por Galperin, como fundamentais para que os conceitos sejam assimilados pelo sujeito, e estas constituem a formação da atividade interna, mental.

Desse modo, a ação mental tão diferente da externa, material, é produto da transformação, por etapas, da última, a linguagem interna. A formação por etapas das ações ideais, em particular mentais, relaciona a atividade psíquica com a atividade externa, do objeto, material, representando assim, não só a chave de compreensão dos fenômenos psíquicos, mas também a sua dominação na prática. (GALPERIN, 1959, p. 466, apud, TALÍZINA, 1988).

Na formação por etapas das ações mentais, a atividade externa se transforma em atividade interna, começa com a motivação, em seguida o professor orienta o aluno nas ações que deverá executar para seu aprendizado, logo após, este realiza a atividade passando assim para forma materializada, e deste modo o aprendiz verbaliza o que aprendeu e vai analisar tudo o que compreendeu, chegando à linguagem interna que evidencia o aprendizado do estudante no assunto estudado. (MENDOZA, 2010).

2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMA COMO METODOLOGIA DE ENSINO NO CONTEÚDO DE DERIVADAS PARCIAIS

As primeiras ideias da constituição da resolução de problemas surgiram nos tempos antigos, somente após alguns períodos os problemas de matemática passaram a ocupar um lugar central no currículo da matemática escolar. Existem registros de problemas matemáticos na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda, encontrados problemas matemáticos em livros-texto de matemática dos séculos XIX e XX. Mas seus exemplos apresentavam uma visão limitada quanto à aprendizagem de resolução de problemas (ONUICHIC, 1999).

Afirma-se, de acordo com Dante (2008) & Tintorer (2013), que a resolução de problema como metodologia de ensino, auxilia o aluno na apreensão de significados, a Resolução de Problema pode levar o estudante a pensar, desenvolver seu raciocínio lógico, a saber enfrentar situações novas, ajuda a preparar o cidadão para vida. Mas, primeiramente o professor deve se capacitar para ensinar os alunos a resolver problemas, aprimorar suas habilidades no saber interpretar, analisar e argumentar. Assim, estará contribuindo para que os aprendizes venham efetivar os quatro pilares da educação: aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser.

2.1 Atividade de Situações Problema em Matemática

A Atividade de Situações Problema em Matemática tem como objeto de estudo os problemas matemáticos, visando dispor aos estudantes estratégias eficazes que contribuem com a qualidade do desempenho na resolução de problemas. Desse modo, “esta atividade externa deve passar por cinco etapas qualitativas de formação por etapas das ações mentais até chegar ser interna, com alunos motivados utilizando um sistema de computação algébrica, norteado pela direção do processo de estudo” (MENDOZA; ORTIZ; MORENO, 2009 apud MENDOZA; TINTORER, 2011, p. 3).

Quadro 1 - A Atividade de Situações Problema

Ações	Operações
Primeira Ação: <i>Compreender o problema</i>	Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema.
Segunda Ação: <i>Construir o modelo matemático</i>	Determinar as variáveis e incógnitas; nominar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições e por último realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.
Terceira Ação: <i>Solucionar o modelo matemático</i>	Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo; selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo e solucionar o modelo matemático.
Quarta ação: <i>Interpretar a solução</i>	Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema; dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema; realizar uma reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

Fonte: Mendoza, 2009.

...os problemas matemáticos, visam dispor aos estudantes estratégias eficazes, de modo que: “esta atividade externa deve passar por cinco etapas qualitativas de formação por etapas das ações mentais até chegar ser interna, com alunos motivados utilizando um sistema de computação algébrica, norteado pela direção do processo de estudo”.

A ASP em Matemática desenvolvida por Mendoza (2009) encontra-se formada por um sistema invariante de quatro ações com suas respectivas operações (Quadro 1) que permitem solucionar várias classes de problemas matemáticos.

Portanto, através dos procedimentos da ASP podem ser resolvidos diversos problemas que tenham principalmente modelos matemáticos. De acordo com a complexidade dos conteúdos matemáticos a serem assimilados, os conhecimentos prévios dos estudantes e suas habilidades na resolução de problema, deve-se começar a orientação das ações da ASP por problemas heurísticos e não por situações problema (MENDOZA; TINTORER, no prelo).

Solução:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -400x^2 + 6.800x - 12.000 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400(x+h)^2 + 6.800(x+h) - 12.000 - (-400x^2 + 6.800x - 12.000)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400(x^2 + 2xh + h^2) + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400x^2 - 800xh + 400h^2 + 6.800x + 6.800h - 12.000 + 400x^2 - 6.800x + 12.000}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-800xh - 400h^2 + 6.800h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400h - 800x + 6.800}{h} \\
 &= -800x + 6.800
 \end{aligned}$$

Desse modo, pode-se perceber que o cálculo foi resolvido utilizando a derivada de uma função, que apresenta a seguinte definição: A derivada da função $f(x)$, em relação a x é a função $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e o processo de calcular a derivada é chamado de derivação. Dizemos que uma função $f(x)$ é derivável no ponto c se $f'(c)$ existe, ou seja, se o limite do quociente diferença que define $f'(x)$ existe no ponto $x = c$.

Prosseguindo, calcula-se o nível de produção x quando estão sendo produzidas 9000 unidades:

$$x = 9 \text{ (9.000 unidades)}$$

$$f'(9) = -800(9) + 6.800 = -400$$

Apresenta-se o conceito de derivada num ponto: se uma função possui uma derivada em x_1 , a função será derivável em x_1 . Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

Com a realização da revisão, adentrou-se no conteúdo de derivadas parciais com o seguinte Problema: Estima-se que a produção semanal de uma fábrica é dada pela função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, onde x é o número de operários especializados e y o número de operários não especializados utilizados no trabalho. No momento, a mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados e 60 operários não especializados. Use a análise marginal para estimar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

O desenvolvimento da resolução do problema para ensinar os estudantes o assunto de derivadas, ocorreu por meio das ações e operações da Atividade de Situações Problema, conforme descrito a seguir:

I. Compreender o problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados e elementos desconhecidos.

Análise Marginal: em economia se refere ao uso de uma derivada para estimar a variação do valor de uma função em consequência de uma mudança no valor de uma das variáveis.

Taxa de Variação: calcular a função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, o que corresponde a derivar a função em relação a uma das variáveis mantendo fixa a outra variável. Este processo é conhecido como derivação parcial; a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função.

Determinar e interpretar os dados do problema:

- A fábrica possui operários especializados e não especializados para produção semanal em unidades.
- A mão de obra disponível é constituída por 30 operários especializados.
- 60 operários não especializados.

O objetivo do problema é determinar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não especializado permanecer constante.

II. Construção do modelo matemático.

Determinar as variáveis:

- A variável “ x ” representa o número de operários especializados e a variável “ y ” o número de operários não especializados utilizados no trabalho.
- $x \in R$.
- $y \in R$.

Construção da função que envolve duas variáveis

Como $f(x, y)$ o número de operários especializados, y o número de operários não especializados) = $1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, então a função $f(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ representa as unidades produzidas por semana.

Foi esclarecido aos estudantes que em vários problemas nos quais envolvem funções de duas variáveis, temos como objetivo calcular a taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, isso significa derivar a função obtida ao manter-se uma variável fixa. Este procedimento chama-se derivação parcial, sendo que a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função.

6	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Saber empregar a regra da cadeia e aplicações na resolução de problema.	AP	4	O estudante deve saber utilizar o sistema da ASP em derivadas parciais e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas.
7		Saber perceber o conceito de diferenciabilidade de uma função de duas variáveis $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0) \Delta x - f_y(x_0, y_0) \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ através da atividade de situações problema.	AT	2	Orientação do sistema de ações da ASP em diferenciabilidade a partir de problemas de funções de duas variáveis. A ação compreender o problema, solucionar o modelo estão vinculadas com o objetivo do problema.
8		Saber resolver problemas de diferenciabilidade e suas aplicações.	AP	4	O estudante deve saber utilizar o sistema da ASP em diferencial e suas aplicações (etapa verbal externa para si). As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas. No momento 3, elabora-se se o plano de ensino de acordo com o nível de partida evidenciado pela prova diagnóstica, em conjunto com o sistema de ações da ASP, direção do processo de estudo e as etapas mentais no assunto de Derivadas Parciais nas características dos conteúdos matemáticos. No momento 4, foi realizada a análise por meio das informações coletadas e dispostas nos instrumentos de análise: provas e guias de observação.

Legenda: AT: Aula teórica, AP: Aula Prática.

8ª Ação: Fazer os planos de aulas

Elaborou-se os planos de aula mantendo a conexão com os princípios teóricos da formação das etapas mentais, a direção em sua forma cíclica e a Atividade de Situações Problemas em Matemática. Na disciplina de Cálculo III modalidade a distância, os planos de aula eram colocados na sala virtual pelo professor em cada quinzena que se iniciava, o qual os estudantes tinham acesso ao conteúdo elaborado em forma de slide, além dos livros-textos e livros complementares de cálculo. Os feedbacks (retroalimentação) das dúvidas apresentadas pelos estudantes respondidos por meio de mensagem individual, chat e principalmente no fórum-tira-dúvidas relacionado ao assunto de cada quinzena, os feedbacks são descritos pelos tutores a distância e também pelo professor da disciplina.

Por meio da ASP de Mendoza e das etapas das ações mentais de Galperin, mais precisamente, se elaborou a base orientadora da ação no conteúdo de derivadas parciais. O primeiro passo foi iniciado com uma revisão sobre derivada de função com uma variável, em seguida, se explicou o conteúdo de derivadas parciais e seu conceito, ambas através de situação problema.

O planejamento realizado teve como objetivo que os estudantes fossem capazes de desenvolver o cálculo da taxa de variação na produtividade da mão de obra e do capital utilizando a derivação parcial, compreender o cálculo de funções com duas variáveis e diferenciar a derivação parcial em relação a variável x e y .

O desenvolvimento do método de ensino propôs a utilização da base orientadora da ação de forma preparada,

por meio do sistema de ações da ASP em derivadas parciais, as orientações forma apresentadas no modo completo para que os estudantes compreendessem todo o processo de derivação parcial. O conteúdo foi desenvolvido por meio de aulas teóricas e práticas, a Resolução de Problema foi utilizada como estratégia de ensino, a direção da ASP em derivadas parciais a ser utilizada foi do tipo cíclica, em que se estabeleceu a relação da orientação, execução e controle do sistema de ações de modo a garantir o objetivo do ensino.

Para isto, o processo de ensino-aprendizagem iniciou com o seguinte problema: Um empresário calcula que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o lucro é dado por $f(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$ reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades?

A partir deste problema, e em razão da importância de saber quais os conhecimentos prévios que os alunos possuíam em relação ao assunto, foram feitas as seguintes perguntas aos estudantes: Quais são os dados do problema?; O que significa $f(x)$ no problema dado?; Quando vai existir a derivada de uma função?; Como sabemos que a derivada de um determinado ponto existe? E Qual o significado do resultado final desta função?

Realizou-se a execução da resolução do referido problema do assunto de derivada de função de uma variável, sendo todo este processo necessário para posteriormente iniciar o conteúdo de derivadas parciais. Assim apresenta-se a solução do problema.

2.2 A Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais

Segundo Mendoza (2009), a atividade de situação problema em matemática é uma estratégia para resolver problemas matemáticos que se fundamenta na teoria psicológica de formação por etapas das ações mentais de Galperin, a direção do processo de estudo, princípios de resolução do matemático Polya podendo ser apoiado por um sistema de computação algébrica.

De acordo com objeto de estudo constituído pelo conteúdo de derivadas parciais, buscou-se sua elaboração na resolução de problemas matemáticos e utilização de uma estratégia de ensino. Assim, a partir da ASP em matemática criada por Mendoza, foi construída uma Atividade de Situações Problemas em Derivadas Parciais, para a execução desta pesquisa.

Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais está composta por ações e operações que são:

A primeira ação, *compreender o problema de derivadas parciais* se faz necessário: realizar a leitura do problema para se extrair todos os elementos desconhecidos na sua forma simbólica, bem como o significado das palavras existentes no problema; destaca-se os dados e suas condições e descreve-se o(s) objetivo(s) do problema no assunto de derivadas parciais e suas aplicações.

A segunda ação *construir o modelo matemático de derivadas parciais*, se faz necessário localizar no problema as variáveis e incógnitas; separar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; compreender e construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições, quando está não estiver explícita no enunciado do problema, e por último realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.

A terceira ação *Solucionar o modelo matemático de derivadas parciais*, por meio da definição formal e/ou através das regras de derivação adequadas na solução de cada problema a ser utilizada a partir definição de derivadas parciais para solucionar o modelo matemático.

A quarta ação *interpretar a solução de derivadas parciais*, deve-se realizar a interpretação do resultado encontrado; descrever todos os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema; apresentar resposta que evidencie o(s) objetivo(s) do problema; realizar uma reflexão baseada no(s) objetivo(s) do problema; fazer uma análise a partir de novos dados e condições que estejam relacionados diretamente ou não com o(s) objetivo(s) do problema, para a partir desses

novos dados, se possível reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

As ações apresentam uma ordem lógica que deve ser respeitada. A execução de todas as ações está subordinada ao problema, e nem todas as ações estarão presentes em todos os problemas. Desse modo, o sistema de ações possui uma ordem lógica, mas não necessariamente tem que ser linear (MENDOZA, 2009).

Faz-se necessário a utilização de problemas com dados suficientes para alcançar o objetivo e a execução dos cálculos. A ASP é um procedimento que pode resolver muitos problemas que tenham principalmente modelos matemáticos. Mendoza afirma que, devido aos vários conteúdos matemáticos a serem assimilados, apresentarem-se de forma complexa, sendo necessário conhecimentos prévios dos estudantes e suas habilidades na resolução de problemas, a orientação das ações da Atividade de Situação Problema deve começar com problemas em que a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado, exigindo assim do estudante tempo para pensar e arquitetar um plano a ser executado, ou seja, uma estratégia que o levará a solução e só após desenvolver atividades de situações problema (MENDOZA, 2009).

2.3 Exemplos da Atividade de Situações Problema em Derivadas Parciais

O estudo do cálculo é a matemática das variações e este tem como instrumento de destaque o método de derivação pelo qual se estuda as taxas de variação. Nesse sentido, as taxas de variação encontram-se inseridas em vários contextos como: a aceleração, produtividade da mão de obra e do capital, taxa de crescimento de uma população, taxa de infecção de uma população suscetível durante uma epidemia e muitas outras. Todos estes assuntos podem ser encontrados em forma de problemas matemáticos, a ser desenvolvido no ensino-aprendizagem da derivada.

Em muitos problemas que envolvem funções de duas variáveis, estamos interessados em calcular a taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece constante, o que corresponde a derivar a função em relação a uma das variáveis mantendo fixa a outra variável. Este processo é conhecido como derivação parcial; a derivada resultante é chamada de derivada parcial da função (HOFFMANN et al., 2011).

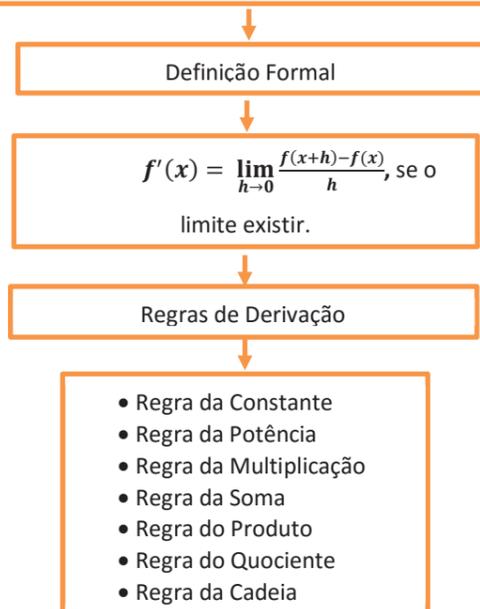
Hughes-Hallett et al. (2011), descreve que a derivada pode ser interpretada, geometricamente, como o

coeficiente angular da reta tangente à curva e, fisicamente, como uma taxa de variação, e sua aplicação pode ser encontrada em todo o campo das ciências.

De acordo com o estudo em questão, destaca-se neste os conhecimentos básicos do nível de partida necessários para resolver derivada de função de uma variável, que foram elaborados e utilizados na fase de análise da prova diagnóstica e que podem ser utilizados para resolver cálculos de derivadas (Esquema 3).

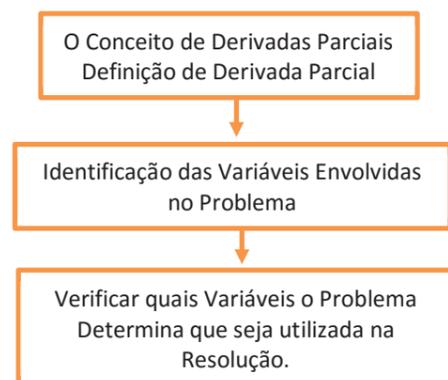
Esquema 3 - Conhecimentos Básicos de Derivação

Primeiramente verifica-se, se a função é simples ou composta, nesse sentido se for simples pode-se responder por meio da definição formal ou as técnicas de derivação (regras) adequadas à questão.



Para a compreensão e resolução dos problemas referente ao conteúdo de derivadas parciais, além das técnicas (regras) apresentadas anteriormente, se fez necessário o conhecimento das propriedades essenciais (Esquema 4):

Esquema 4 - Conhecimentos Básicos de Derivada Parcial



Por fim, resolve-se o problema utilizando a definição formal para derivadas parciais ou as técnicas de derivação (regras) adequadas em relação às variáveis explícitas no problema. Ressalta-se que é necessário conhecer e saber utilizar as técnicas de derivação para resolver problemas de derivadas parciais e suas aplicações.

Prosseguindo com a aplicação de Derivadas Parciais a partir da ASP. Apresenta-se um resumo da sua contextualização com as diversas ciências.

Na indústria, se um fabricante constata que x unidades de um produto podem ser vendidos no mercado interno por R\$90,00 a unidade e y unidades podem ser vendidas no mercado externo pelo equivalente a R\$110,00 a unidade, a receita total obtida com as vendas do produto é dada por $R = 90x + 110y$.

Na psicologia, o quociente de inteligência de uma pessoa, ou QI , é medido através da expressão $Q = \frac{100m}{a}$, onde a e m são a idade cronológica e a idade mental, respectivamente.

As situações acima são típicas em que uma grandeza de interesse depende dos valores de duas ou mais variáveis. Pode-se apresentar como outros exemplos o volume de água no reservatório de uma cidade, que pode depender da quantidade de chuva e do número de habitantes, e a produção de uma fábrica, que pode depender do capital disponível, do número de operários e do preço das matérias-primas.

Como no caso das funções de uma variável, uma função de duas variáveis, $f(x, y)$ pode ser imaginada como uma “máquina” que produz uma “saída” $f(x, y)$ para cada “entrada” (x, y) . O domínio de f é o conjunto de todas as entradas possíveis; o conjunto de todas as saídas possíveis é o contradomínio de f . Funções de três variáveis independentes, $f(x, y, z)$, de quatro variáveis independentes, $f(x, y, z, t)$ ou de um número de variáveis podem ser definidas de forma semelhante.

O exemplo a seguir descreve o Modelo da ASP em derivadas parciais e suas aplicações, utilizado no assunto estudado na disciplina de Cálculo III na Educação a Distância.

Ex. 2: O único supermercado de uma pequena cidade do interior trabalha com duas marcas de suco de laranja, uma marca local que custa no atacado 30 centavos a garrafa e uma marca nacional muito conhecida que custa no atacado 40 centavos a garrafa. O dono do supermercado estima que, se cobrar x centavos pela garrafa da

construísem a partir do conteúdo disponibilizado pelo professor no ambiente AVA, videoconferências e aulas presenciais de forma (preparada). A direção de estudo foi utilizada juntamente com a ASP em Derivadas Parciais de forma cíclica, para garantir a relação da orientação, execução e controle do sistema de ações com o objetivo de ensino.

6ª Ação: O sistema de avaliação

Selecionou-se o sistema de avaliação levando em consideração a etapa mental que se encontrava o estudante. Realizou-se a avaliação diagnóstica na Atividade de Resolução Problema em Derivadas de Funções com uma variável, visando identificar os conhecimentos prévios dos alunos, foi evidenciado a não existência dos conhecimentos prévios, sendo preciso fazer a ligação entre os assuntos necessários por meio de atividades em diferentes momentos da ASP em Derivadas Parciais. Foram realizadas discursões sobre o assunto em aulas presenciais no Polo da Universidade Virtual de Roraima no município de Alto Alegre, atividades disponibilizadas na sala da disciplina no ambiente AVA, duas provas de lápis e papel formativa e uma final aplicada em aula presencial, que se encontram entre os tipos de avaliação

(informal, semiformal e formal). Na avaliação final buscou-se verificar o cumprimento do objetivo de ensino. A avaliação serviu como controle durante todo o processo de ensino-aprendizagem, permitindo assim, fazer adaptações quando necessário.

3º MOMENTO: Construir a ASP em Matemática.

7ª Ação: Preparar o plano de ensino considerando as etapas mentais

Este momento permitiu a elaboração do plano de ensino centrado na resolução de problema, embasado no sistema de ações da ASP e das etapas mentais no assunto de Derivadas Parciais e nas características dos conteúdos matemáticos. O planejamento (Tabela 1) foi criado levando em consideração os seguintes elementos: conteúdos, objetivos, tipo de aula (TA), quantidade de hora (H/A) e caracterização da etapa mental. No ensino a distância o Plano de Ensino é disponibilizado ao estudante na sala de aula do AVA, logo no início do semestre, fica disponível para download durante todo o período da disciplina.

Tabela 1- Plano de Ensino

nº	Conteúdo	Objetivos	TA	H/A	Etapas Mentais
1	Taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra permanece fixa. Interpretação geométrica de derivadas parciais de uma função de duas variáveis.	Compreender o conceito de derivada parcial em relação a x , é dada por $f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, e a derivada parcial em relação a y , é dada por $f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$. Saber interpretar na forma geométrica uma função de duas variáveis.	AT	2	Orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções de duas variáveis (Etapa de formação da BOA). A ação compreender o problema, solucionar o modelo e interpretar a solução estão vinculadas com o objetivo do problema.
2	Derivadas Parciais	Resolver problemas a partir do limite quociente diferença e interpreta-los geometricamente.	AP	4	O estudante deve praticar (etapa mental) minuciosamente o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário. As ações são consciente, compartilhadas, detalhada e não generalizada.
3	Análise Marginal	Saber aplicar a regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema.	AT	2	O estudante deve praticar (etapa mental) minuciosamente o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário. As ações são consciente, compartilhadas, detalhada e não generalizada.
4	Análise Marginal	Saber utilizar a regra de derivação e a função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha \cdot L^\beta$ na resolução de problema.	AP	2	O estudante deve explicar (etapa verbal) o sistema de ações sem ajuda de objetos externos. As ações são consciente, compartilhadas, detalhadas e as operações são automatizadas.
5	Regra da cadeia para funções de duas variáveis	Saber aplicar a definição da Regra Cadeia $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ para funções de duas variáveis na resolução de problema.	T	2	Orientação do sistema de ações da ASP em derivadas parciais a partir de problemas de funções de duas variáveis. A ação compreender o problema, solucionar o modelo e interpretar a solução estão vinculadas com o objetivo do problema.

estratégias ou métodos para resolução de problema matemáticos e ações lógicas para a inclusão de conceito. Este sistema de ações foi chamado de Atividade de Situações Problema (ASP) em Derivadas.

Foi aplicada uma avaliação diagnóstica por meio de provas de lápis e papel aos estudantes da disciplina de Cálculo III no Polo da Universidade Virtual de Roraima (UNIVIRR) no município de Alto Alegre/RR, na aula denominada na Educação a Distância de aula presencial, no intuito de obter informações quanto ao domínio das habilidades na formação do conceito de derivadas de funções com uma variável, foram realizadas também a observação direta nas aulas de videoconferência ministrada no Polo da UNIVIRR em Boa Vista/RR. Se fez necessário verificar as habilidades na resolução de problemas no tema de derivadas de funções com uma variável, bem como buscar informações sobre as ações da ASP em Derivadas de Funções com uma Variável, como: compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

Na elaboração das avaliações diagnósticas foi de suma importância incluir componentes que permitiram determinar a etapa mental em que se encontrava as ações relacionadas às habilidades da ASP em Derivadas de Funções com uma Variável, sendo necessário que as nas perguntas tivessem a frase “justifique sua resposta”. Na aplicação das provas de lápis e papel e das primeiras aulas, foi averiguado a atitude e motivação dos estudantes.

O professor buscou manter a atitude e motivação dos estudantes durante todo o processo de ensino aprendizagem com a sua habilidade didática na explicação dos assuntos e exemplos além dos slides elaborados com os assuntos da disciplina, disponibilizados no AVA. A interação dos estudantes com os professores e com os outros estudantes da turma, ocorrem por meio de tecnologias adequadas a educação a distância. Em resumo esta fase representou o momento anterior ao planejamento de ensino, a qual se considerou principalmente os objetivos de ensino, o nível inicial dos estudantes e as condições gerais do curso.

2º MOMENTO: Planejar a ASP em Matemática.

4ª Ação: Formular o sistema invariante das ações

No segundo momento, o professor decidiu como conduziria os estudantes da zona de desenvolvimento real à potencial, sendo que neste instante foi construído a zona de desenvolvimento proximal. Teve como desafio desenhar o sistema de ações invariantes que se apresentou como uma

ação complexa que esteve conexas ao objetivo de ensino no intuito de ampliar a eficiência no processo de aprendizagem.

Procedendo da avaliação diagnóstica na Atividade de Resolução Problema em Derivadas de funções com uma variável, se planejou a ASP em Derivadas Parciais. Ressalta-se que, se fez necessário organizar atividades via sala virtual e aulas presenciais, de maneira a criar um elo em vários momentos da ASP em Derivadas Parciais, devido os estudantes não possuírem conhecimentos prévios suficientes. Desse modo, a atividade em questão esteve formada pelo sistema de ações: compreender o problema, construir o modelo matemático (derivada de funções com duas variáveis), solucionar o modelo matemático (solucionar a derivada de funções com duas variáveis) e interpretar a solução.

O processo de ensino aprendizagem se iniciou com situações problema, em que as operações se encontravam no enunciado do problema, uma vez que o assunto em questão era complexo. Porém, quando os estudantes não possuem habilidades para resolução de problemas, pode-se iniciar com problemas em que a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado, que permitirá ao estudante se dedicar um tempo, pensando e arquitetando um plano a ser utilizado que o levará a solução. Foram escolhidos problemas que estavam condicionados à solução do modelo matemático, por estar relacionado com as propriedades essenciais do conceito de derivadas parciais e seu cálculo, tendo como propriedade essencial do conceito, que uma função f de duas variáveis, x e y , é derivável em relação a x , permanecendo a variável y constante, denotada por, $f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, se o limite existir. Do mesmo modo, a derivada parcial de f em relação a y , permanecendo a variável x constante, denotada por, $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, se o limite existir.

A partir desta ideia inicial na forma material, se realizou um trabalho por etapas de formação de ações para a construção do conceito nas aplicações de derivadas parciais (forma verbal e interna). Por conseguinte, foi planejado o sistema invariante de ações levando em consideração os conhecimentos prévios.

5ª Ação: Formular a base orientadora da ação

De modo a obter uma assimilação e retenção ascendente, foi utilizado inicialmente a base orientadora da ação geral, completa e preparada formada pelo sistema de ações da ASP em Derivadas Parciais. Todas as orientações foram dadas na forma (completa) para que os estudantes

marca local e y centavos pela garrafa da marca nacional, venderá $70 - 5x + 4y$ garrafas da marca local e $80 + 6x - 7y$ garrafas da marca nacional por dia. Por quanto o dono do supermercado deve vender as duas marcas de suco de laranja para maximizar o lucro?

Solução:

I. Compreender o problema

Através da leitura do problema iremos extrair os dados e elementos desconhecidos.

Determinar e interpretar os dados do problema:

- O supermercado trabalha com duas marcas de suco de laranja;
- Uma marca de suco de laranja local e uma marca nacional;
- A marca de suco de laranja local custa no atacado 30 centavos a garrafa;
- A marca de suco de laranja nacional custa no atacado 40 centavos a garrafa.

O objetivo do problema é determinar por quanto o dono do supermercado deve vender as duas marcas de suco de laranja para maximizar o lucro.

II. Construção do modelo matemático

Determinar as variáveis:

- A variável “ x ” representa os centavos cobrados pela venda da garrafa da marca local e a variável y os centavos cobrados pela venda da garrafa da marca nacional.
- Construção da função que envolve duas variáveis:

(lucro total) = (lucro com a venda da marca local) + (lucro com a venda da marca nacional)

Latas vendidas da marca local = $(70 - 5x + 4y)$

Lucro por lata da marca local = $(x - 30)$

Latas vendidas da marca nacional

$$= (80 + 6x - 7y)$$

Lucro por lata da marca nacional = $(y - 40)$

- O lucro diário com a venda de suco de laranja é dado pela função

$$f(x, y) = (70 - 5x + 4y) \cdot (x - 30) + (80 + 6x - 7y) \cdot (y - 40)$$

III. Solução do modelo matemático

$$f(x, y) = (70 - 5x + 4y) \cdot (x - 30) + (80 + 6x - 7y) \cdot (y - 40) = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5.300$$

Calculamos as derivadas parciais

$$f_x = -10x + 10y - 20 \quad e \\ f_y = 10x - 14y + 240$$

e igualamos estas derivadas a zero para obter $-10x + 10y - 20 = 0$ e $10x - 14y + 240 = 0$

ou $-x + y = 2$ e $5x - 7y = -120$

Resolvemos este sistema de equações para obter

$$x = 53 \quad e \quad y = 55$$

Assim, (53, 55) é o único ponto crítico de f .

O passo seguinte consiste em aplicar o teste das derivadas parciais de segunda ordem. Como

$$f_{xx} = -10 \quad f_{yy} = -14 \quad e \quad f_{xy} = 10$$

Obtemos

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-10)(-14) - (10)^2 = 40$$

Como

$$D(53, 55) = 40 > 0 \quad e \quad f_{xx}(53, 55) = -10 < 0$$

IV. Interpretar a solução

A conclusão é que f possui um máximo (relativo) para $x = 53$, $y = 55$. Em outras palavras, o dono do supermercado pode maximizar o lucro vendendo a marca local de suco de laranja por 53 centavos a garrafa e a marca nacional por 55 centavos a garrafa.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O problema da pesquisa foi estabelecido na forma mista, por permitir a integração entre o enfoque qualitativo e quantitativo, o que possibilitou relacionar os dados e a análise nestes modelos. A investigação se desenvolveu com a utilização de ações e operações da ASP que são: compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e

interpretar a solução, no conteúdo de derivadas parciais, de forma a responder a pergunta deste trabalho.

A investigação do ensino-aprendizagem de derivadas parciais, por meio de métodos mistos garantiu a eficácia de poder analisar as mesmas questões da pesquisa nos dois enfoques. E assim obter coletar e analisar dados ainda mais relevantes. Neste contexto, o sistema de ações da ASP foi convertido em categorias qualitativas e em variáveis no quantitativo, de modo que apresentou resposta aos questionamentos do estudo.

Os objetivos da pesquisa foram evidenciados de forma explicativa, descrevendo as respostas dos fatos e acontecimentos das aulas teóricas, práticas e avaliação, que se deu por meio da coleta nos instrumentos escolhidos, mostrando, se e como, o sistema de ações produziu a aprendizagem dos estudantes no conteúdo derivadas parciais.

Na pesquisa foram realizadas análises do desempenho individual dos alunos, obtidas pelas situações problemas propostas nas atividades e nos testes. Desse modo buscou-se explicar o processo de aprendizagem das derivadas parciais por meio da ASP fundamentada na teoria das ações mentais. Esta estratégia foi utilizada como um recurso inovador na área de estudo pelo método resolução de problema, visando englobar os conteúdos envolvidos para o ensino-aprendizagem da temática, (os quais fazem parte esta pesquisa). E assim, permitir que os investigadores obtivessem o entendimento integral do fenômeno.

Como uma exigência do método realizou-se observações diretas das aulas presenciais da disciplina, como também do comportamento e relato dos estudantes nas aulas de tira-dúvidas e videoconferência.

Esta pesquisa buscou fazer uma combinação dos dados qualitativos e quantitativos com o objetivo de inferir resultados explicativos mais consistentes.

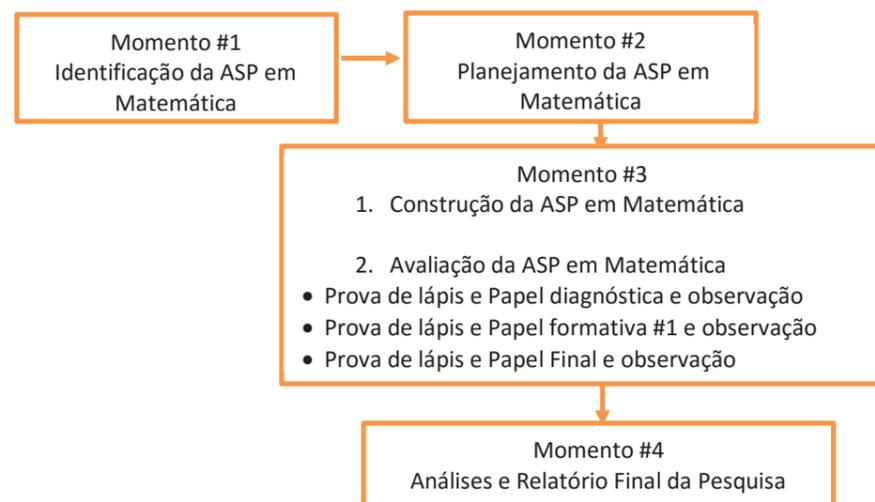
Conforme descreve Yin (2010), tem crescido a atenção por parte dos pesquisadores às investigações dos métodos mistos, na qual o pesquisador mistura ou combina técnicas, métodos, abordagens, conceitos ou linguagem de pesquisa quantitativa e qualitativa em um único estudo. (JHONSON & ONWUEGBUZIE, 2004, p. 17, grifo nosso Apud YIN, 2010, p. 87).

A investigação propôs por meio da execução das ações e operações (categorias da ASP) estudar o efeito qualitativo na aprendizagem em derivadas parciais, conforme as características das etapas mentais. Desse modo, foi apresentado como característica sequencial a categorização das operações em forma de subcategorias da ASP em nível I, as ações da ASP em nível II e as características das ações do processo de assimilação em nível III, o qual permitiu a pesquisadora organizar as categorias resultantes em um modelo de inter-relações, possibilitando assim explicar como ocorreu o desempenho dos estudantes nas atividades realizadas.

A pesquisa foi organizada em quatro momentos de acordo com o (Esquema 5), no momento 1, a pesquisadora buscou identificar situações que o professor no desenvolvimento do seu trabalho pode enfrentar. No momento 2, o professor deve decidir como conduzir os estudantes da zona de desenvolvimento real à potencial, neste instante se constrói a zona de desenvolvimento proximal.

No momento 3, elabora-se o plano de ensino de acordo com o nível de partida evidenciado pela prova diagnóstica, em conjunto com o sistema de ações da ASP, direção do processo de estudo e as etapas mentais no assunto de Derivadas Parciais nas características dos conteúdos matemáticos. No momento 4, foi realizada a análise por meio das informações coletadas e dispostas nos instrumentos de análise: provas e guias de observação.

Esquema 5 – Momento Geral da Pesquisa



4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA ASP EM DERIVADAS PARCIAIS

A pesquisa foi organizada de acordo com a Atividade de Situações Problemas da Didática, a qual foi desenvolvida em três momentos, com o objetivo de realizar a investigação de maneira relevante, estudando por meio da atividade de situações problemas e das ações mentais o desempenho dos estudantes na aprendizagem do conteúdo de derivadas parciais.

Os momentos ora descritos foram de suma importância para a execução da referida pesquisa uma vez que possibilitaram obtenção de informações necessárias na realização do estudo e no estabelecimento dos instrumentos de análise.

1º MOMENTO: Identificar a ASP em Derivadas Parciais.

1ª Ação: Compreender a situação problema

A metodologia utilizada na educação a distância caracteriza-se por mediar uma relação em que professor e alunos estão fisicamente separados. A interação dos estudantes com os docentes e entre si, apesar do distanciamento geográfico, é garantida por diferentes meios tecnológicos, resultando em maior eficiência para o processo de aprendizagem. Buscando a formação integral dos estudantes, para que se transformem em produtores de conhecimento e não em meros receptores de informações, faz-se necessária a comunicação multidirecional, mediada por tecnologias apropriadas. (PPP, 2013).

Neste momento de identificação da ASP em derivadas parciais, primeiramente a pesquisadora se reuniu com o professor de matemática da Universidade Federal de Roraima, responsável pela disciplina de Cálculo III na modalidade a distância, para saber como seria desenvolvida disciplina no semestre 2014.1.

Por conseguinte, a pesquisadora foi em busca de informações em que identificou algumas situações, ou seja, problemas que o professor poderá enfrentar na modalidade a distância, como a falha na conexão da internet, a pouca disponibilidade de livros de cálculo nos polos do interior, como também equipamentos visuais e de áudio com defeito, apagões frequentes de energia, porém o professor deve se empenhar para desenvolver sua aula mesmo em meio a essas diversas situações. Se fez necessário também conhecer o projeto político pedagógico do curso de licenciatura em matemática na educação a distância e a ementa da disciplina de cálculo III, as disciplinas pré-requisito e bibliografias, buscou-se informações sobre os estudantes, se identificou os

recursos didáticos, livros textos disponíveis na biblioteca, foi determinado os objetivos de ensino do conteúdo, estabeleceu-se os conhecimentos prévios que os estudantes deveriam possuir para o estudo dos conteúdos da disciplina, em especial para o assunto de derivadas parciais. Ressalta-se que esse levantamento se fez necessário porque o objetivo do problema didático se encontra sempre relacionado à aprendizagem.

2ª Ação: Identificar a atividade cognitiva

Na identificação da atividade cognitiva se buscou a assimilação dos estudantes quanto ao conceito de derivadas de funções com duas variáveis, sendo que este conteúdo no momento inicial da disciplina era novo para os estudantes. Foi utilizada a resolução de problema como metodologia de ensino, se fez necessário analisar que conhecimentos prévios os estudantes deveriam dominar, para então, após se elaborar Atividade de Situação Problema em Derivadas Parciais.

Esse contexto, exigiu do professor o domínio dos conteúdos matemáticos, o qual soube organizar o sistema de ações nos assuntos que trabalhou e escolheu o método adequado, pois o domínio do conteúdo e o método adequado foram elementos indispensáveis que levaram a alcançar o os objetivos de ensino da disciplina. O assunto da disciplina foi disponibilizado aos estudantes na sala da disciplina de Cálculo III do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), de maneira explicativa em forma de slide, que continham como exemplo problemas destacando as quatro ações da ASP.

3ª Ação: Determinar o nível de partida da atividade cognitiva dos alunos.

O professor possuía informações suficientes quanto aos requisitos intelectuais mínimos dos estudantes para que os objetivos de ensino fossem alcançados, os requisitos não eram apenas os conhecimentos prévios que os estudantes possuíam, mas também a execução das ações e métodos. Pois o professor já havia ministrado uma disciplina no semestre anterior para estes estudantes, o que facilitou o estabelecimento das informações necessárias quanto ao conhecimento dos alunos.

Pretendia-se desenvolver a formação de habilidades dos estudantes na resolução de problema tendo como modelo matemático o cálculo de derivadas parciais, nesse propósito se fez necessária a formação de conceitos e habilidades no cálculo de derivadas parciais e suas aplicações.

Os conhecimentos prévios principais são: conceito de derivadas de funções com uma variável e suas aplicações,