ESTADO DE RORAIMA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA - UERR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS - PPGEC

GLADYS MARIA BEZERRA DE SOUZA

ESTUDO DA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE FUNDAMENTADO NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA APLICADO À LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Orientador: Profº. DSc. Hector José Garcia Mendoza

Boa Vista - RR

2014

GLADYS MARIA BEZERRA DE SOUZA

ESTUDO DA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE FUNDAMENTADO NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA APLICADO À LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada a Universidade Estadual de Roraima - UERR, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências.

Linha de pesquisa: Métodos Pedagógicos e Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências

Orientador: Prof. DSc. Hector José Garcia Mendoza

Boa Vista - RR

2014

ESTUDO DA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE FUNDAMENTADO NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA APLICADO À LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SOUZA, Gladys Maria Bezerra de.

Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicado à Licenciatura em Matemática. / Gladys Maria Bezerra de Souza; Orientador: DSc. Hector José Garcia Mendoza – Boa Vista: Ed. do Autor, 2014.

Dissertação do Mestrado Profissional de Ensino de Ciências - Universidade Estadual de Roraima, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Boa Vista-RR, 2014.

1. Matemática – Ensino e aprendizagem do conceito de Limite. 2. Teoria da Aprendizagem Significativa. 3. Resolução de Problemas.

Bibliotecária– CRB –

Biblioteca - UERR

Boa Vista - RR

2014

SOUZA, Gladys Maria Bezerra de,

Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicado à Licenciatura em Matemática.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Aprovado em: 27/06/2014

Banca Examinadora

Profº. DSc. Hector José Garcia Mendoza.
Instituição: Universidade Federal de Roraima - UFRR
Orientador

Profº. DSc. Oscar Tintorer Delgado
Instituição: Universidade Estadual de Roraima - UERR
Membro Interno

Profº. DSc. João Paulino da Silva Neto
Instituição: Universidade Federal de Roraima - UFRR
Membro Externo (Convidado)

Boa Vista - RR

2014

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado primeiramente a Bhagavan Sathya Sai Baba que com sua mensagem de paz, amor, retidão, verdade e não violência direciona a minha vida.

À minha família: minha mãe Dorvalina Bezerra de Souza, irmãs: Grace Mary, Helia Maria e irmão Gladstone, sobrinha Greice Anne, que com muito carinho e paciência me apoiaram durante a realização de mais este sonho.

Em especial às minhas filhas Lara Suyanne e Larissa Suyanne com minhas netinhas Maria Eduarda e Lunna Maria.

Póstumas: aos meus filhos Krishna (1993-1995) e Laiza (1988-1995) que se estivessem aqui, ficariam felizes por mais esta realização.

Aos amigos que torcem, ajudam nos momentos mais críticos, pacientes com nossas ausências e acolhedores quando realmente precisamos.

Dedico a todos os estudantes que se empenham com amor e dedicação na busca de conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a DEUS por me proporcionar saúde e todas as qualidades necessárias à realização de mais esta etapa.

Agradeço à minha querida mãe, também professora, como tributo aos seus esforços em me proporcionar a educação que me trouxe até este momento. Aos meus irmãos Gladstone, Grace e Hélia pelo apoio e amizade. Às minhas filhas Larissa Suyanne e Lara Suyanne e, minhas queridas netas: Maria Eduarda e Lunna Maria, que são o motivo de toda minha luta e dedicação.

Aos meus colegas de estudo do mestrado e, em especial à minha colega de pesquisa, mestranda Solange Almeida Santos, Soraya Feitosa e Rosenilda Souza pela ajuda e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

À professora doutoranda Nilra Jane Bezerra do Instituto Federal de Roraima (IFRR) pela aceitação em colaborar neste trabalho e se tornar parte integrante da pesquisa.

Aos membros da banca de qualificação professor Doutor Oscar Tintorer e a professora Doutora Marta Pontin Darsie pelas orientações valorosas e pertinentes no início deste estudo.

Em especial ao meu orientador professor Doutor Héctor José G. Mendoza pela sua dedicação e apoio na realização desta pesquisa.

A todos os nossos professores do mestrado, pelos seus esforços, conhecimentos e contribuições e, aqueles que lutaram e contribuíram para que este mestrado fosse uma realidade na Universidade Estadual de Roraima – UERR.

“O homem só terá cumprido seu papel na vida quando trouxer felicidade à sociedade”.

Bhagavan Sri Sathya Sai Baba

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de caso, realizado a partir de uma intervenção pedagógica, sobre a observação do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Limite na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima (IFRR). O objetivo foi analisar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite de funções de uma variável real, dos estudantes da Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Roraima, utilizando como referência de análise a resolução de problemas como metodologia de ensino e fundamentado na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Tem-se como premissa central neste estudo que os conceitos e princípios da teoria da aprendizagem significativa aliada à metodologia da resolução de problemas poderão contribuir com o atual processo de ensino e aprendizagem da Matemática possibilitando uma prática pedagógica mais eficaz e, consequentemente uma aprendizagem significativa. Para tanto, apresenta-se os aspectos mais relevantes dos conceitos e princípios da teoria da aprendizagem significativa, que segundo Ausubel, é um processo que se dá por meio do qual uma nova informação relaciona-se com aspectos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, bem como da resolução de problemas sob a ótica dos parâmetros curriculares e teóricos da área de ensino, complementando com a base teórica da direção de ensino voltada à Matemática. Esta pesquisa configura-se como interpretativa, de enfoque misto, mas com maior ênfase no aspecto qualitativo cuja coleta de dados foi realizada através da observação direta, entrevista, filmagem e provas de lápis e papel. Deste modo, a partir da análise dos resultados obtidos, conclui-se que houve uma melhora na aprendizagem, embora o desempenho dos estudantes não tenha demonstrado um resultado tão significativo como esperado. Entretanto, o processo envolvendo a metodologia da resolução de problemas e a prática de ensino fundamentada em uma teoria da aprendizagem como a aprendizagem significativa foi de grande relevância para todos os sujeitos envolvidos na pesquisa. Portanto, este estudo, bem como os dados coletados, poderá servir de base para futuros pesquisadores que queiram se aprofundar neste tipo de pesquisa.

Palavras-chaves: Aprendizagem Significativa. Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem do Conceito de Limite. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This paper presents a case study that was performed in the classroom, on the teaching-learning process observation of the limit contents in the differential and Integral Calculus I discipline that belongs to course degree in mathematics of the Roraima Federal Institute of Roraima (RRFI). We have central premise in this study that the concepts and principles of meaningful learning theory combined with problem-solving methodology can promote a change in the current process of teaching-learning of mathematics, enabling a more effective pedagogical practice and, as a consequence a significant learning. Therefore we present the most relevant aspects of the concepts and principles of meaningful learning theory as well as troubleshooting under the optics of the curricular parameters and theoretical parameters of the teaching area, complementing with the theoretical basis of teaching Math-oriented direction. This research appears as a mixed approach, interpretive, but with greater emphasis on qualitative aspect whose data were collected through direct observation, interview, filming and exams using pencil and paper sheet. Thus, from the analysis of the obtained results, we conclude that there was an improvement in learning, although the performance of the students has not demonstrated a result as significant as expected. However, the process involving the troubleshooting methodology and teaching practice based on a theory of learning as meaningful learning was of great relevance for all subjects involved in this research. Therefore, this study, as well as the data collected, could serve as a basis for future researchers who want to deepen in this type of research.

Keywords: Significative learning. Mathematical education. Problem resolution. learning-teaching of limit concept.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ANEB – Avaliação Nacional da Educação Básica

APS - Aprendizagem Significativa

ESPM – Estratégia de Situações Problema em Matemática

ESPL – Estratégia de Situações Problema em Limite

IFRR – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima

IE – Indicador Essencial

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PCN's – Parâmetros Curriculares Nacionais

PPP – Projeto Político Pedagógico

UERR – Universidade Estadual de Roraima

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O panorama da educação nos tempos atuais nos conduz para uma reflexão sobre as várias tendências pedagógicas que o progresso científico promoveu ao longo da última década. Nos tempos atuais os professores de Matemática clamam por mudanças no sistema de ensino desta disciplina, em todos os níveis, desde o ensino fundamental até o ensino superior, no ensejo de melhorar a aprendizagem e o sentimento que os estudantes nutrem por esta disciplina.

As pesquisas que envolvem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática dos últimos vinte anos trazem como tema principal a metodologia de resolução de problemas, e também maior relevância para a Educação Matemática nos Cursos de Licenciatura em Matemática.

Dos encontros, congressos, seminários e conversas informais com professores atuantes no Ensino Superior em Roraima percebeu-se um ponto comum apontado por unanimidade, no ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, o desempenho insatisfatório dos acadêmicos nesta disciplina. Em muitos casos, a maioria dos estudantes é reprovada. Os professores reclamam que os estudantes não têm a maturidade cognitiva necessária em matemática para alcançarem um bom desempenho nesta disciplina, ou seja, eles não têm o conhecimento prévio necessário para assimilar o novo conhecimento a ser apresentado nesta disciplina. Por outro lado, também observamos que a utilização de teorias da aprendizagem não faz parte do conhecimento para a elaboração do plano de ensino dos cursos de Licenciatura em Matemática, pelo menos, não aqui em nosso contexto, e, mesmo a resolução de problemas não é trabalhada com as técnicas propostas pelos principais teóricos que defendem esta metodologia.

Com base nestes dados obtidos de maneira informal resolvemos desenvolver este tema no projeto de pesquisa, apresentado como um dos requisitos de aprovação ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciência da Universidade Estadual de Roraima – UERR. Inicialmente pensamos em desenvolver a pesquisa no ensino fundamental, mas em resposta às reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de matemática dos futuros professores de matemática, no Ensino Superior, por exemplo, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, optamos em mudar o foco de nosso estudo.

Embora a prerrogativa do ensino atual para a disciplina de matemática seja a centralização na resolução de problemas, é preciso adotar como prioridade a prática de ajudar os estudantes a aprender a matemática, ou seja, ensinar os estudantes procedimentos com tratamento didático específico baseado em alguma teoria da aprendizagem. Mas, não é apenas o fato de aprender e praticar uma teoria da aprendizagem é, antes de tudo ter um compromisso com o ensino numa relação mais direta entre professor e aluno, para que o professor perceba as reais dificuldades no aprendizado da matemática e, de que modo pode ajudar o aluno a superá-las; por outro lado, o aluno deve assumir o papel de estudante que deseja aprender e gostar de matemática.

Com o foco voltado aos futuros professores, iniciamos esta pesquisa em uma turma do Curso de Licenciatura de Matemática, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no contexto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Roraima (IFRR), para estudar se a prática docente com o uso da atividade de situações problemas em matemática como estratégia de resolução de problemas, a partir dos pressupostos da Teoria de Ausubel produz, nos estudantes, uma aprendizagem significativa.

Nesta pesquisa teremos uma situação de aprendizagem em curto prazo, onde apenas uma única unidade de material (Limite) é aprendida e a transferência a novas unidades de aprendizagem não será medida. Desta forma, os efeitos deste único ensaio de prática refletirão a estrutura cognitiva existente nos estudantes, bem como poderão induzir a modificação de suas estruturas, influenciando os subsequentes ensaios de práticas.

A aprendizagem significativa e a teoria da assimilação apresentadas por Ausubel nos permite vislumbrar uma saída para o problema da aprendizagem escolar, no caso aqui, a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, inspirando-nos a uma reflexão sobre o que é ensinar e aprender no contexto de sala de aula do ensino superior.

Desse modo, a questão da pesquisa é definida como: *O processo de ensino do conteúdo de limite, aplicado aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima pode ser avaliado como eficaz na aprendizagem quando se analisa a partir da estratégia de situações problema em matemática como metodologia de ensino, fundamentado pela teoria da aprendizagem significativa?*

O objetivo geral da pesquisa *é analisar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite de funções de uma variável real nos estudantes da Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Roraima, utilizando como referência de análise a resolução de problemas como metodologia de ensino e fundamentado na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel.*

Além disso, se constituem como objetivos específicos:

- *Identificar o problema da situação problema da didática do conteúdo de limite de funções de uma variável real;*
- *Analisar o planejamento do processo de ensino dos conteúdos de limite de funções de uma variável real;*
- *Avaliar o efeito do processo de ensino, na aprendizagem dos conteúdos de limite de funções de uma variável real.*

A intensão, portanto, é analisar e compreender a organização do ensino e seu desenvolvimento de acordo com os estudos de Ausubel e de sua teoria – aprendizagem significativa – bem como a abordagem da estratégia de situações problemas.

A avaliação dos estudantes, nesta pesquisa, tem correlação com o processo de assimilação de Ausubel, que se inicia com o objetivo de ensino que é analisar o processo de ensino e aprendizagem, a começar pela investigação sobre o conhecimento prévio dos estudantes. Aplicar-se-á a avaliação diagnóstica na primeira etapa e, depois a avaliação formativa no conteúdo de limite, concluindo-se com uma avaliação final do conteúdo de limite. Contudo nossa análise a partir destas avaliações terá como predominância a análise qualitativa com base na resolução de problemas mediante o sistema de quatro ações.

Em respostas aos questionamentos que surgiram no decorrer dos estudos para a redação final quanto às denominações referentes aos professores, estudantes e escola vamos adotar as terminologias apresentadas pelos "Referenciais para a Formação de Professores"[1]. Assim, chamaremos de *estudantes* aos indivíduos que estudam no ensino superior, *formador* ao profissional que promove diretamente a formação inicial ou continuada, nos cursos de ensino médio

[1] Ministério da Educação-Secretaria de Educação Fundamental (Brasília, 2002).

e superior; e, *conteúdo escolar* refere-se a tudo que se ensina na escola por meio de situações formais e informais.

O presente trabalho está organizado conforme descrito a seguir: Capítulo I – Pressupostos Teóricos; Capítulo II – Procedimentos metodológicos e o Capítulo III – Resultado e discussões.

No capítulo I apresentamos a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel com ênfase aos temas que nortearam este estudo. Além disso, incluímos o estudo de resolução de problemas com enfoque específico a um sistema invariante de quatro ações de estratégia de situações problema em Matemática (ESPM).

O capítulo II traz os procedimentos metodológicos da pesquisa, desde os enfoques qualitativo e quantitativo, ou seja, este estudo configura-se como misto, mas com maior ênfase ao qualitativo, com um olhar sobre o processo de ensino na prática docente do ensino superior, a partir da metodologia de resolução de problemas e da aplicação de uma teoria da aprendizagem. Desse modo os resultados e discussões, apresentados no capítulo III, partem das observações realizadas em sala de aula numa turma de 11 acadêmicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Roraima (IFRR).

Nossa proposta para o produto resulta deste olhar no processo de ensino do conteúdo de limite tem como ênfase a prática docente realizada mediante a teoria da aprendizagem significativa, de Ausubel (1980). Finalmente, nas análises e considerações finais fazemos uma síntese que contempla o percurso da dissertação em todos os seus passos, nossa percepção a respeito do processo estudado e sugestões a partir do resultado encontrado.

2 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

A aprendizagem significativa e a teoria da assimilação apresentadas por Ausubel nos permite vislumbrar uma saída para o problema da aprendizagem escolar, no caso aqui, a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos no meio acadêmico, inspirando-nos a uma reflexão sobre o que é ensinar e aprender no contexto de uma sala de aula do Ensino Superior.

Aqui poderia surgir a pergunta: se toda a aprendizagem de sala de aula já não seria significativa. Em um primeiro momento poderíamos pensar que sim, aliás, é o que se espera, principalmente, os professores e os pais dos estudantes. Mas, como poderemos perceber ao longo desta dissertação, não é bem isso que acontece. Vamos conhecer então a respeito desta teoria.

Primeiramente, David Ausubel foi professor Emérito da Universidade de Columbia, em Nova York. Médico-psiquiatra de formação, mas dedicou sua carreira acadêmica à psicologia educacional. Ao aposentar-se, depois de muitos anos, voltou à psiquiatria e faleceu em 2008, aos noventa anos.

A teoria de Ausubel focaliza primordialmente a aprendizagem cognitiva. Ele é um representante do cognitivismo e, como tal, propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem, segundo o ponto de vista cognitivista. Para ele, a aprendizagem significa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do indivíduo, ocorrendo uma interação e consequentemente produzindo novos significados.

Segundo Ausubel[2] (1980) a teoria da aprendizagem cognitiva foi desenvolvida em primeiro lugar na *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (1963) e expandida na edição anterior à edição de 1980. Nesta edição de 1980[3] a teoria da aprendizagem cognitiva foi modificada por causa das pesquisas e comentários dos alunos e colegas. Então, Ausubel decidiu chamar esta teoria de aprendizagem de teoria da assimilação, para enfatizar uma característica importante: o papel interativo que as estruturas cognitivas existentes desempenham no processo da nova aprendizagem.

---

[2] Prefácio da segunda edição.
[3] É a edição que usamos para o nosso principal referencial teórico sobre a teoria da aprendizagem significativa.

A atenção de Ausubel esteve constantemente voltada para a aprendizagem ocorrida em sala de aula, no cotidiano das escolas. Para ele, existia um fator primordial: o conhecimento que o estudante já adquiriu, cabendo ao professor identificar esse conhecimento e ensinar de acordo.

Ausubel considerava de um modo geral que o que é realmente passível de conhecer depende tanto da natureza, da extensão, das limitações das capacidades e dos processos cognitivos humanos e do desenvolvimento dos mesmos ao longo da vida, como da natureza objetiva daquilo que os seres humanos procuram saber, da sua cognoscibilidade e da metodologia para se adquirirem tais conhecimentos (epistemologia, método científico).

Ausubel (1980) acredita que os alunos adquirem grande parte dos seus conhecimentos primariamente por meio da aprendizagem receptiva significativa, que é facilitada por um ensino expositivo, apropriadamente elaborado, e por materiais instrucionais adequados.

Para Ausubel (1980) embora uma teoria válida da aprendizagem não nos possa dizer como ensinar no sentido prescritível, pode nos oferecer pontos de partida mais viáveis para a descoberta de princípios gerais do ensino que podem ser formulados tanto em termos de processos psicológicos intervenientes como em termos de relações de causa e efeito. Em geral, a partir de uma teoria da aprendizagem é que podemos desenvolver noções defensáveis de como os fatores decisivos nas situações de ensino e de aprendizagem podem ser manipulados com maior eficácia.

Um corpo de assuntos é muito mais fácil de compreender e lembrar se é relacionável (ancorável) a ideias organizadoras e explicativas derivadas de uma única posição teórica com plausibilidade aparente, do que um simples compêndio de fatos distintos, não integrados e inexplicados, relacionados, na melhor das hipóteses, a uma grande variedade de pontos de vista teóricos contraditórios, e muitas vezes irreconciliáveis. Este é o ponto de vista teórico de Ausubel (1980) sobre aprendizagem escolar.

Para Ausubel (1980, p. 14) as teorias da aprendizagem bem como as teorias de ensino são interdependentes, ao invés de mutuamente exclusivas.

Ausubel (1980) afirma que o conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (“culturalmente”) significativas, ideias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva do estudante (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos.

Portanto, a aprendizagem significativa envolve a aquisição de novos significados, que por sua vez, são produtos da própria aprendizagem significativa. Ou seja, a emergência de novos significados no estudante reflete o complemento de um processo de aprendizagem significativa. A essência desse processo é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo estudante através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal), o que significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do estudante, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição (AUSUBEL, 1980).

Desse modo, um dos aspectos mais relevantes será obter a informação sobre o conhecimento prévio dos estudantes a partir de uma avaliação diagnóstica com um material bem elaborado para garantir a validez das análises mediante as respostas dos estudantes.

Ausubel explica a diferença entre alguns tipos de aprendizagem, como por exemplo, por recepção e por descoberta e, também seus efeitos, se significativos ou mecânicos. Neste estudo vamos nos focar basicamente na aprendizagem receptiva significativa, apesar de que, segundo Ausubel (1980) a solução de problemas está basicamente relacionada com a aprendizagem por descoberta, contudo, verificamos que para nosso estudo é mais adequado aplicá-la à aprendizagem receptiva significativa.

Do ponto de vista do argumento da aprendizagem escolar, nenhuma outra preocupação teórica é mais relevante ou urgente no estágio atual do nosso conhecimento do que a necessidade de se distinguir claramente os tipos principais de aprendizagem (aprendizagem automática e significativa, formação de conceito, solução de problemas verbais e não verbais) que ocorrem em sala de aula (AUSUBEL, 1961, 1980).

Neste estudo a respeito da teoria da aprendizagem significativa apresentada por Ausubel daremos ênfase à aprendizagem receptiva significativa. Grande parte do material de aprendizagem é apresentada verbalmente, “a aprendizagem receptiva verbal não é necessariamente automática em caráter e pode ser significativa mesmo sem uma experiência previa não verbal ou de solução do problema” (AUSUBEL, 1980).

Segundo Ausubel (1980) na *aprendizagem receptiva* todo conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado ao estudante sob a forma final, ou seja, o professor prepara o material, apresenta-o ao estudante da melhor forma possível e o estudante só precisa internalizar e incorporar este material para reproduzi-lo posteriormente. Se a aprendizagem receptiva é significativa a tarefa ou a matéria potencialmente significativa é compreendida ou tornada significativa durante o processo de internalização; mas, se a aprendizagem receptiva for automática ou mecânica isto não acontece.

Para Ausubel (1980) a *aprendizagem significativa* ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o estudante sente-se familiarizado, e quando o estudante adota uma estratégia correspondente para assim proceder.

A *aprendizagem automática*, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias e quando falta ao estudante o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e, além disso, se o estudante adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária e literal.

Considerando o exposto por Ausubel, temos dúvidas a respeito de como o processo de aprendizagem está realmente acontecendo no ensino da Matemática nas escolas públicas em nossa realidade. Mas, conforme minha experiência como professora no Ensino Básico, as informações que temos a partir dos encontros nas escolas com outros professores de matemática são desanimadoras. Os professores de Matemática estão sem saber o que fazer, mas continuam tentando novas metodologias e estratégias. Acontece que os estudantes estão terminando o Ensino Fundamental com pouquíssimo conhecimento matemático e isto está refletindo nos níveis subsequentes.

O que se percebe, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, é que os estudantes estão chegando sem o conhecimento adequado, ou seja, sem a maturidade matemática requerida para assimilar os conhecimentos matemáticos no ensino superior. Isto quer dizer que os estudantes estão saindo do ensino médio com uma aprendizagem muito deficiente dos conhecimentos matemáticos.

Ocorre-nos, portanto um questionamento: se o uso da teoria da aprendizagem significativa com o uso da aprendizagem receptiva, concomitante com um sistema de quatro ações da estratégia de situações problemas matemáticos, poderá propiciar uma aprendizagem significativa no ensino do conteúdo de limite. Para tanto, é necessário conhecer tanto a teoria da aprendizagem significativa como a estratégia de resolução de problemas.

Assim, segundo Ausubel (1980, p. 36) quando a tarefa de aprendizagem é potencialmente significativa (relacionada de forma não arbitrária e substantiva à estrutura cognitiva do aluno), torna-se uma questão um pouco mais complexa do que a aprendizagem significativa. No mínimo, depende obviamente de dois fatores principais envolvidos ao estabelecer este tipo de relação, ou seja, a natureza do assunto a ser aprendido e a natureza da estrutura cognitiva de cada aluno (ver o Quadro 1 e observar especialmente os itens B e C).

Quadro 1 - Relações entre aprendizagem significativa, potencial significativo, significado lógico e psicológico.

A	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA OU AQUISIÇÃO DE SIGNIFICADOS	Requer	(1) Material Potencialmente Significativo.	e	(2) Disposição para a Aprendizagem Significativa
B	POTENCIAL SIGNIFICATIVO	Depende do (a)	(1) Significado Lógico (a relação não arbitrária e substantiva do material de aprendizagem com as ideias correspondentemente relevantes que se encontram dentro do domínio da capacidade intelectual humana)	e	(2) A disponibilidade de tais ideias relevantes na estrutura cognitiva de um estudante em particular.
C	SIGNIFICADO PSICOLÓGICO	É o produto da	Aprendizagem Significativa	Ou do	Potencial significativo e a disposição para a aprendizagem significativa

Fonte: Quadro 2-1 de Ausubel (1980, p. 35)

Quanto *à natureza do assunto*, esta deve ser suficientemente não arbitrária e não aleatória, de modo a permitir o estabelecimento de uma relação não arbitrária e substantiva com ideias correspondentemente relevantes localizadas no domínio da capacidade intelectual humana (ideia correspondentemente relevante que pelo menos alguns seres humanos são capazes de aprender se a eles é dada a oportunidade para que tal ocorra). O segundo fator que determina o potencial significativo do material de aprendizagem é uma função que pertence à estrutura cognitiva do estudante e não ao material da aprendizagem.

Para Ausubel (1980) a aquisição de significados enquanto fenômeno natural ocorre em seres humanos particulares – não na espécie humana de uma maneira geral. Portanto, para que a aprendizagem significativa ocorra de fato, não é suficiente que as novas informações sejam simplesmente relacionadas (de forma não arbitrária e substantiva) às ideias correspondentemente relevantes no sentido abstrato do termo (as ideias correspondentemente relevantes que *alguns* seres humanos estão aptos a aprender em circunstâncias apropriadas); é também necessário que o conteúdo ideacional relevante esteja disponível na estrutura cognitiva de um determinado estudante.

Então, na medida em que é de nosso interesse os produtos da aprendizagem significativa em sala de aula, a disponibilidade e outras propriedades importantes, de conteúdos relevantes para diferentes estruturas cognitivas dos estudantes, constituem os determinantes e as variáveis mais decisivas do potencial significativo. Contudo, deve-se considerar que o potencial significativo do material a ser aprendido varia não somente em relação à experiência educacional prévia como também a fatores tais como idade, Q.I., ocupação, condições socioculturais (AUSUBEL, 1980, p. 37).

Para facilitar o entendimento, convém esclarecermos algumas definições sobre o significado tais como o *significado potencial* que diz respeito a certas expressões simbólicas e de algumas conceituações de proposições para determinados estudantes; e o *significado real (fenomenológico ou psicológico)*, que é o produto de um processo de aprendizagem significativa. O significado real, de acordo com este ponto de vista, emerge quando este significado potencial transforma-se num novo conteúdo cognitivo, diferenciado e idiossincrático, para um indivíduo particular, como produto de uma relação não arbitrária e substantiva e a interação com ideias significativas em sua estrutura cognitiva.

Aqui vamos evidenciar a distinção entre o significado lógico e psicológico (ver Quadro 1). O significado psicológico é idêntico ao significado real ou fenomenológico. Todas as vezes que, houver uma correspondência entre o significado lógico e a natureza da tarefa, encontra-se uma base geral ou não idiossincrática para o significado potencial. Resumidamente, o significado lógico depende somente da “natureza do material”. É um dos dois pré-requisitos que, juntos determinam se a tarefa de aprendizagem é potencialmente significativa para o estudante. O outro pré-requisito é a disponibilidade de conteúdo significativo adequado na estrutura cognitiva do estudante.

O significado lógico, portanto, refere-se ao significado daquilo que é inerente a certos tipos de material simbólico, devido à natureza deste material. A evidência do significado lógico está na base da relação arbitrária e substantiva entre o material e as ideias correspondentemente significativas que fazem parte do domínio da inteligência humana. Já *o significado psicológico* (real ou fenomenológico), é uma experiência cognitiva totalmente idiossincrática.

Mas Ausubel (1980) alerta que a aprendizagem significativa não deve ser interpretada simplesmente como a aprendizagem de material significativo, pois na aprendizagem significativa estes materiais são apenas potencialmente significativos. Contudo, se estes materiais já forem significativos, o objetivo da aprendizagem significativa – ou seja, a aquisição de novos significados – se completa por definição, antes mesmo de qualquer tentativa de aprendizagem. De fato, na grande maioria das tarefas da aprendizagem potencialmente significativas, as partes componentes do material são também significativas; entretanto, nestes casos, *a tarefa como um todo* é apenas potencialmente significativa.

Por exemplo, no aprendizado de um novo teorema geométrico, cada uma das partes componentes já é significativa, mas a tarefa como um todo (compreender o teorema) ainda está por ser realizada. Consequentemente, o material já é significativo, assim como suas partes componentes também significativas, podem ser percebidos, ou de outro modo, pode-se reagir a eles significativamente, embora não possam ser compreendidos.

Ausubel (1980) ressalta que mesmo que o indivíduo manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa, nenhum significado emergirá se ele apenas decora uma série de palavras relacionadas arbitrariamente.

2.1 A Aprendizagem de Conceito

Neste estudo nos utilizaremos da aprendizagem conceitual receptiva, com ênfase no método de assimilação conceitual visto que estamos trabalhando com jovens e adultos do Ensino Superior.

Ausubel (1980) define conceito como objetos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolo. Existem dois métodos gerais de aprendizagem conceitual: *(1) formação conceitual*, que ocorre principalmente nas crianças pequenas; e (2) *assimilação conceitual* nas crianças na idade escolar e nos adultos. Na formação conceitual os atributos específicos do conceito são adquiridos através da experiência direta, isto é, através de fases sucessivas de formulação de hipóteses, testes e generalização.

Os conceitos constituem um aspecto importante da teoria da assimilação, uma vez que a compreensão e a solução criativa de problemas dependem amplamente da disponibilidade na estrutura cognitiva do estudante, ou de conceitos superordenados (na aquisição de conceito subordinativo), ou de conceitos subordinativos (na aquisição de conceito superordenado). Fica também evidente que: (1) os seres humanos interpretam a experiência perceptual em termos de conceitos próprios de suas estruturas cognitivas e (2) que os conceitos constituem a “matéria prima” tanto para a aprendizagem receptiva significativa como para a generalização das proposições significativas para a solução de problemas.

Os conceitos consistem nas abstrações dos atributos essenciais que são comuns a uma determinada categoria de objetos, eventos ou fenômenos, independentemente da diversidade de dimensões outras que não aquelas que caracterizam os atributos essenciais, compartilhados por todos os membros da categoria. Uma vez que os conceitos têm nomes, exatamente como objetos ou eventos particulares, eles podem ser manipulados, compreendidos e transferidos mais prontamente do que os conceitos inomináveis.

Para Ausubel (1980) os fatores mais importantes que afetam a *aquisição de conceito* são (1) a heterogeneidade de exemplos para posterior consolidação num contexto mais homogêneo; (2) a combinação e a ordenação de exemplos positivos e negativos; e (3) a relevância da informação apresentada ou disponível para conceito em questão.

Os significados, por sua vez*,* adquirem propriedades genéricas (categóricas) quando a formação de conceito ocorre na realidade ou, no caso da *assimilação de conceito*, quando as definições refletem implicitamente a formação de conceito que ocorreu na evolução da linguagem. Assim, durante o curso mais contemporâneo da aquisição de conceito, os conceitos tornam-se progressivamente menos globais e difusos, centrando-se principalmente nos atributos essenciais predominantes, e tornam-se mais gerais e menos particulares ou subjetivos. Apesar disso, cada indivíduo possui significados denotativos e conotativos para um determinado conceito.

Além disso, Ausubel (1980, p. 73) também menciona que o*s significantes* não possuem necessariamente os mesmos significados para indivíduos de diferentes graus de maturidade cognitiva. Esta é a razão pela qual as crianças não têm outra alternativa senão a de usar significantes precisos, culturalmente padronizados, para conceitos cujos significados são ainda, para a criança, vagos, difusos, muito ou pouco abrangentes.

Segundo D’Amore (2007, p.200) nos últimos decênios desenvolveu-se um forte debate sobre o “ensino por conceitos”, uma problemática que foi originada ao redor dos anos sessenta, a partir de um movimento internacional de renovação de currículos, ocasionada pela grande revalorização educativa dos conteúdos das diferentes disciplinas em geral, e, em particular, das ciências e da Matemática.

D’Amore (2007, p. 201) menciona uma proposta feita por Gagné (1965-1985) quanto ao ensino por conceito, já que ele tende a separar a didática dos conceitos concretos daquela dos abstratos: a concretude e a abstração devem ser vistas com relação à qualidade de referência aos objetos considerados nos conceitos: em se tratando de conceitos derivados da observação empírica de objetos, são conceitos concretos; e, em se tratando de conceitos derivativos de definições, e que implicam, portanto relações abstratas são conceitos abstratos.

Para Ausubel (1980) devido à influência de conceitos contidos em sua estrutura cognitiva, os seres humanos percebem uma representação consciente da realidade altamente simplificada, esquemática, seletiva e generalizada, em lugar de uma representação sensorial completa e fiel da mesma. A formação de conceito para um indivíduo é tanto culturalmente determinada quanto um produto de experiências idiossincráticas na aquisição de conceito.

Segundo Vygotsky (1962) a representação simplificada e generalizada da realidade que é alcançada através da existência e uso de conceitos torna possível a criação de uma linguagem com significados relativamente uniformes para todos os membros de uma cultura, facilitando, consequentemente, a comunicação.

Igualmente importante é o fato de possibilitar (1) o estabelecimento na estrutura cognitiva de construtos genéricos e abrangentes (e de suas combinações proposicionais) em relação aos quais novos significados correlativos podem ser adquiridos e retidos mais eficientemente como parte de uma estrutura organizada de conhecimento e (2) a manipulação, a inter-relação e a reorganização de ideias envolvidas na formulação e teste de hipóteses e, portanto, na solução criativa de problema.

Para Ausubel (1980) os conceitos libertam o pensamento, a aprendizagem e a comunicação do domínio do mundo físico. Tornam possível a aquisição de ideias abstratas na ausência da experiência empírico-concreta. Estas ideias podem ser usadas tanto para categorizar situações novas sob rubricas já existentes, como servem de base para assimilação e descoberta de novos conhecimentos.

Finalmente, o agrupamento de conceitos em combinações potencialmente significativas é responsável pela formação e compreensão de proposições, que por sua vez, são descrições da realidade criadas pelo homem, e estas descrições mudam periodicamente à medida que ou seus conceitos ou suas proposições se alteram ou são rejeitados.

Consequentemente, o âmbito no qual o conceito identifica os aspectos preponderantes e significantes da experiência com a realidade objetiva é uma dimensão importante na formação do conceito. Ao formular novos conceitos, o indivíduo pode escolher focalizar os atributos essenciais que são mais ou menos centrais, mais ou menos subjetivos, mais ou menos característicos, ou mais ou menos idiossincráticos. A realidade objetiva denotada por um conceito determina, em ampla escala, a sua utilidade tanto na estrutura de conhecimento como para fins de aprendizagem, solução de problemas e comunicação.

Uma vez adquiridos, os conceito servem a muitos fins no funcionamento cognitivo. Quando já existentes na estrutura cognitiva, o seu uso é exemplificado pela compreensão imediata (perceptual) dos significados dos conceitos e proposições previamente adquiridos e já significativos, quando são encontrados em ocasiões posteriores. É também exemplificada pelo tipo de aprendizagem receptiva na qual os representantes menos evidentes de uma classe genérica conhecida podem ser identificados como tal (categorização cognitiva), e nas quais novos conceitos, subconceitos ou proposições são adquiridos ao serem assimilados por entidades conceituais ou proposicionais mais abrangentes.

Para Ausubel (1980) é evidente que a diferença *entre aquisição e uso de conceitos* é um tanto arbitrária, uma vez que uma das funções principais dos conceitos existentes na estrutura cognitiva é facilitar a aquisição de novos conceitos, mais no caso da assimilação de conceito do que no caso da formação do conceito. No entanto, essa diferença é ainda assim útil, na medida em que é coerente com a diferença que foi mantida entre a aquisição original de uma determinada parte do conhecimento e seu uso posterior na aquisição de futuros conhecimentos.

Além disso, os conceitos existentes são utilizados de muitas outras maneiras além de apenas facilitar a aquisição de novos conceitos, principalmente na categorização perceptual da experiência, na solução de problema e na percepção dos significados de conceitos e proposições previamente aprendidos.

Ausubel (1980) menciona que a solução de problema, por um lado, e a formação e utilização de conceito, por outro, sobrepõem-se de muitas maneiras. Os conceitos adquiridos são também empregados em variedades mais simples ou mais complexas de solução criativa de problema na descoberta de novos conceitos. Quando, por exemplo, a aprendizagem de certas ideias apresentadas requer uma reorganização dos conceitos existentes na estrutura cognitiva (por exemplo, a formulação de um novo conceito que seja suficientemente abrangente para incluir duas ou mais ideias apresentadas, que de outro modo seriam irreconciliáveis), o processo de reorganização constitui uma forma de solução de problema. Esse seria um exemplo de aprendizagem superordenada.

2.2 A Aprendizagem Receptiva Significativa e a Retenção

Na aprendizagem escolar torna-se evidente o quanto a aprendizagem significativa é preponderante em relação à aprendizagem automática, da mesma forma que a aprendizagem receptiva é em relação à aprendizagem por descoberta. (AUSUBEL, 1980, p. 23).

Neste ponto vamos considerar os mecanismos psicológicos pelos quais uma vasta quantidade de informações é armazenada na estrutura cognitiva. Ressaltando o que já foi dito sobre a aquisição de conhecimento, que em qualquer cultura é primordialmente uma manifestação da aprendizagem receptiva, ou seja, o conteúdo do que vai ser aprendido é geralmente apresentado ao estudante sob uma forma mais ou menos final, acabada. Desse modo, exige-se do estudante que ele possa simplesmente compreender o assunto e incorporá-lo à sua estrutura cognitiva, de modo que fique disponível, ou para a reprodução, ou para ser relacionado a uma nova informação, ou para solução de problema em alguma ocasião futura.

Contudo, a exposição verbal sendo um método de ensino mais eficiente, leva ao conhecimento mais sólido e menos trivial do que quando os estudantes assumem a função de autodidatas (aprendizagem por descoberta). Também devemos reconhecer que os vários fatores do desenvolvimento que limitam o aspecto significativo da aprendizagem receptiva durante a primeira infância não se aplicam à segunda infância, adolescência e vida adulta (AUSUBEL, 1980).

Segundo Ausubel (1980) alguns estudos mostraram evidências da limitação da aprendizagem receptiva nos estudantes do ensino fundamental do primeiro ciclo devido à falta de maior grau de abstração dos conceitos na estrutura cognitiva e pela falta de termos transacionais que relacionem as ideias entre si e, isto se deve ao pouco ou nenhum interesse que as escolas de ensino fundamental dedicam à aprendizagem de conceito. Mas, várias evidências indicam que técnicas pedagógicas aperfeiçoadas aplicadas à prática educacional estimulam a capacidade tanto das crianças quanto dos adultos para o raciocínio formal ou abstrato.

Entretanto, durante o estágio de raciocínio abstrato do desenvolvimento cognitivo (ensino fundamental), os estudantes, de uma maneira geral, estão aptos a adquirir a maior parte dos novos conceitos compreendendo diretamente relações complexas entre as abstrações (INHELDER E PIAGET, 1958) apud AUSUBEL (1980, p. 101).

Assim, para atingir este tipo tão significativo de aprendizado, não precisam mais depender de provas empíricas e concretas correntes ou recentes e, portanto, são capazes de ultrapassar completamente o tipo intuitivo de compreensão que é o reflexo desta dependência. De maneira geral, este desenvolvimento reflete a disponibilidade de uma estrutura adequada de abstrações complexas e termos transacionais. O ensino expositivo torna-se assim, digno de maior confiança.

Desse modo, através da aprendizagem receptiva significativa, os estudantes podem atingir um nível de raciocínio abstrato, que é qualitativamente superior ao nível intuitivo em termos de generalização, clareza, precisão e poder explicativo. Portanto, neste estágio de desenvolvimento, o emprego adequado da aprendizagem receptiva verbal é altamente significativo.

A aprendizagem receptiva significativa não é passiva, nem mecânica como frequentemente ocorre na prática atual, desde que sejam empregados métodos de aulas expositivas que se baseiam na natureza, condições e considerações sobre o desenvolvimento, que caracterizam a aprendizagem receptiva significativa (Ausubel, 1980).

Para Ausubel (1980, p. 102) a aquisição de significados pela aprendizagem receptiva significativa está longe de ser um tipo passivo de processo cognitivo, pois há muita atividade envolvida. Contudo, a simples apresentação dos significados potenciais não implica necessariamente o seu aprendizado, e tampouco toda a perda subsequente seja o reflexo do esquecimento. Desse modo, antes que os significados sejam afixados na memória, precisam ser primeiramente adquiridos, e o processo de aquisição é necessariamente ativo, mas seu sucesso depende:

- Em parte do estudante e do que este necessita para obter o significado integrativo e do vigor de sua capacidade de autocritica.
- Ou o estudante tenta integrar uma nova proposição com o conjunto de seus conhecimentos relevantes ou contenta-se em estabelecer uma relação com uma única ideia.
- O estudante pode fazer um esforço para revestir a nova proposição com uma terminologia consistente com seu próprio vocabulário e conjunto de ideias, ou pode satisfazer-se em incorporá-la à medida que vai sendo apresentada.
- Finalmente, o estudante pode lutar pela aquisição de significados precisos e não ambíguos, ou contentar-se completamente com noções vagas.

Ausubel (1980) acredita que uma explicação clara dos princípios psicológicos subjacentes da aprendizagem receptiva significativa é acessível a qualquer professor e, quando esses princípios são aplicados e combinados com outros tipos de práticas pedagógicas, podem ocasionar uma melhoria substancial no aproveitamento escolar.

Ausubel (1980) alerta os professores para o percebimento da falsa compreensão do conteúdo estudado, pois os estudantes poderiam iludir-se quanto ao aprendizado significativo. Isto acontece não tanto por eles (estudantes) não terem vontade de compreensão, mas por lhes faltar a capacidade de autocrítica necessária, além de relutarem em lançar mão do esforço ativo necessário ao lidar com um dado assunto, seja no momento de analisá-lo através de diferentes ângulos, seja no momento de harmonizá-lo e integrá-lo a conhecimento correlato ou contraditório e, finalmente ao reformulá-lo do ponto de vista do seu próprio esquema referencial.

Portanto, a tarefa central da pedagogia para Ausubel (1980, p. 103) é desenvolver métodos que facilitem uma variedade ativa da aprendizagem receptiva caracterizada por uma abordagem independente e crítica para a compreensão do assunto. Isto envolve, em parte, o incentivo de motivações para atitudes de autocrítica, relacionados à aquisição de significados precisos e integrados, como também o emprego de outras técnicas voltadas para os mesmos fins. Supõe-se que seja mais provável desenvolver-se uma compreensão acurada e integrada quando:

1. As ideias centrais de uma disciplina são aprendidas antes que se introduzam os conceitos e informações mais periféricas.
2. Observam-se as condições limitadoras do desenvolvimento geral da prontidão.
3. Ressalta-se a definição precisa e acurada, e a ênfase é colocada sobre aa diferenças e semelhanças delineadoras entre os conceitos correlatos.
4. Pede-se aos estudantes para reformular novas proposições com suas próprias palavras.

Para Ausubel (1980) os professores devem colaborar adotando o objetivo de assimilar a matéria criticamente, incentivando os estudantes a reconhecer e desafiar as suposições subjacentes às novas proposições e distinguir entre fatos e hipóteses e entre inferências fundamentadas e infundadas.

Portanto, segundo Ausubel (1980) para que ocorra a aprendizagem receptiva significativa deve-se obedecer a alguns princípios, tais como:

1º. Exige-se no mínimo um juízo implícito de relevância no momento de decidir que ideias estabelecidas na estrutura cognitiva são mais relacionáveis a uma nova tarefa de aprendizagem.

2º. É necessário algum grau de concordância entre elas, particularmente se existem discrepâncias ou conflitos.

3º. As novas proposições são geralmente reformuladas, fundindo-se num esquema pessoal de referência, vocabulário e estrutura de ideais.

> 4º. Finalmente, se o estudante, no curso da aprendizagem receptiva significativa, não encontrar uma base aceitável de harmonizar ideias aparentemente ou genuinamente contraditórias, será inspirado algumas vezes a buscar um grau de síntese ou reorganização de seu conhecimento existente a partir de princípios explicativos mais amplos e abrangentes. O estudante, então, poderá procurar tais proposições em explicações mais recentes ou sofisticadas de um determinado tópico, ou então, tentar descobri-las independentemente.

Além disso, a natureza e as condições da aprendizagem receptiva significativa ativa exigem também um tipo de aula expositiva que leve em consideração *os princípios da diferenciação progressiva e integração* que caracterizam a aprendizagem, a retenção e a organização do conteúdo acadêmico na estrutura cognitiva do estudante.

Ausubel (1980, p. 103) afirma que durante o curso da aprendizagem significativa ocorrem dois importantes processos correlatos. Quando se submete uma nova informação a um determinado conceito ou proposição, a nova informação é aprendida e o conceito ou proposição inclusiva sofre modificações. Esse processo de inclusão, que ocorre uma ou mais vezes, motiva a *diferenciação progressiva* do conceito ou proposição que engloba novas informações.

Na aprendizagem superordenada as ideias estabelecidas na estrutura cognitiva podem tornar-se reconhecíveis enquanto relacionadas, no curso da nova aprendizagem. Consequentemente, adquire-se a nova informação e os elementos existentes da estrutura cognitiva podem assumir uma nova organização e, portanto, novo significado. Esta recombinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva denomina-se *reconciliação integradora*.

A reconciliação integradora é mais completa quando as possíveis fontes de confusão são eliminadas pelo professor ou pelos recursos didáticos. Portanto, pode-se ajudar o estudante a resolver as inconsistências ou conflitos aparentes entre conceitos e proposições.

Assim, toda a aprendizagem que resulta na reconciliação integradora resultará também na posterior diferenciação dos conceitos ou proposições existentes. A reconciliação integradora é uma forma de diferenciação progressiva da estrutura cognitiva que ocorre na aprendizagem significativa.

2.2.1 A diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora

O primeiro princípio, da *diferenciação progressiva*, afirma que grande parte da aprendizagem e toda a retenção e organização dos assuntos são fundamentalmente hierárquicos, vindos de cima para baixo, considerando os níveis de abstração, generalização e abrangência. Já a *integração* de diferentes assuntos é facilitada nas aulas expositivas se o professor e/ou os recursos didáticos disponíveis anteciparem explicitamente o intrincado conjunto de semelhanças e diferenças entre as novas ideias e as ideias relevantes já presentes na estrutura cognitiva de cada estudante.

Segundo Ausubel (1980), no decorrer do processo da aprendizagem significativa ocorrem esses dois importantes processos correlatos: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Desse modo quando se submete uma nova informação a um determinado conceito ou proposição, a nova informação é aprendida e o conceito ou proposição inclusiva sofre modificação. Este processo de inclusão, que ocorre uma ou mais vezes, motiva a diferenciação progressiva do conceito ou proposição que engloba novas informações.

Quando os assuntos são programados de acordo com a diferenciação progressiva, as ideias mais gerais e mais inclusivas da disciplina são apresentadas em primeiro lugar. São então progressivamente diferenciadas, em termos de detalhe e especificidade. Esta ordem de apresentação presumivelmente corresponde à sequência natural de aquisição da consciência e sofisticação cognitiva quando os seres humanos são espontaneamente expostos ou a um campo completamente desconhecido do conhecimento ou a um ramo desconhecido de um corpo de conhecimento familiar. Também corresponde ao modo postulado em que este conhecimento é representado, organizado e guardado no sistema cognitivo humano.

Esses dois pressupostos que aqui mencionamos, em outras palavras, são: 1) é menos difícil para os seres humanos compreender os aspectos diferenciados de um todo previamente aprendido, mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir das suas partes diferenciadas previamente aprendidas[4]. (2) num indivíduo, a organização do conteúdo de uma disciplina particular consiste de uma estrutura

[4] Esta proposição simplesmente reformula o principio de que a aprendizagem subordinativa é mais fácil do que a aprendizagem superordenada. O argumento para utilizar organizadores se baseia no mesmo principio. Não deixamos de valorizar, contudo, que a aprendizagem de certas proposições requer a síntese de conceitos ou proposições (aprendizagem superordenada) subordinados previamente adquiridos (Gagné, 1962a). A necessidade para aprendizagem superordenada periódicas, contudo, não nega a proposição de que tanto a organização psicológica do conhecimento como a organização ótima do assunto geralmente exemplificam o principio da diferenciação progressiva.

hierárquica na sua própria mente. As ideias mais inclusivas ocupam uma posição no topo desta estrutura e abrangem proposições, conceitos e dados factuais progressivamente menos inclusivos e mais diferenciados.

Ausubel (1980) faz a seguinte suposição: Imaginemos que o sistema nervoso humano, como um mecanismo de processamento de dados e de armazenamento, é construído de maneira tal que tanto a aquisição de novos conhecimentos quanto a sua organização na estrutura cognitiva se conforme naturalmente ao princípio da diferenciação progressiva. Se assim for, parece razoável supor que a aprendizagem e a retenção ótima ocorrem quando os professores deliberadamente ordenam a organização e a sequência dos assuntos de maneira similar.

Uma maneira mais explicita de apresentar a mesma proposição é afirmar que as novas ideias e informações aprendidas, são retidas mais eficientemente quando as ideias mais inclusivas e especificamente relevantes já estão disponíveis na estrutura cognitiva para desempenhar um papel subordinador ou para oferecer esteios ideacionais. Os organizadores, naturalmente, exemplificam o princípio da diferenciação progressiva e preenchem esta função em relação a qualquer tópico ou subtópico com o qual são usados. Além disso, contudo, é desejável que a organização do próprio material de aprendizagem dentro de cada tópico ou subtópico e a sequência de vários tópicos e subtópicos num dado curso de estudo também se conforme genericamente a este mesmo princípio.

A diferenciação progressiva da estrutura cognitiva por meio da programação dos assuntos é conseguida utilizando-se uma série hierárquica de organizadores (em ordem descendente de inclusividade), cada qual precedendo a sua unidade correspondente de material detalhado e diferenciado, e colocando o material dentro de cada unidade em ordem descendente de inclusividade. Desta maneira, um subordinador apropriadamente relevante e inclusivo é tornado disponível para oferecer um arcabouço ideativo para cada unidade componente do assunto diferenciado. Além do mais, as ideias dentro de cada unidade assim como as várias unidades em relação com as outras são progressivamente diferenciadas – organizadas em ordem descendente de inclusividade. Os organizadores iniciais, portanto, fornecem um esteio a nível global antes que o estudante se confronte com qualquer parte do material novo.

Portanto, os estudantes dos cursos de graduação são mais capazes de ler e reter material ideativo completamente desconhecido quando, em primeiro lugar, são expostos a organizadores que apresentem princípios subordinadores relevantes e adequadamente inclusivos (AUSUBEL, 1960, 1980).

Na teoria da assimilação apresentada por Ausubel, grande parte da aprendizagem significativa que ocorre poderia ser caracterizada como envolvendo a diferenciação progressiva de conceitos ou proposições. Desse modo, ao se adquirir uma nova informação os elementos existentes da estrutura cognitiva podem assumir uma nova organização e, portanto, novo significado. Esta recombinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva denomina-se *reconciliação integradora*.

Segundo Ausubel (1980) após uma reconciliação integradora, os conceitos e proposições aprendidos anteriormente são modificados e os novos significados são adicionados à estrutura cognitiva. *A reconciliação integradora* é mais completa quando as possíveis fontes de confusão são eliminadas pelo professor ou pelos recursos didáticos. Portanto, pode-se ajudar o estudante a resolver as inconsistências ou conflitos aparentes entre conceitos ou proposições.

Toda aprendizagem que resulta na *reconciliação integradora* resultará também na posterior diferenciação dos conceitos ou proposições existentes. A reconciliação integradora é uma forma de diferenciação progressiva da estrutura cognitiva que ocorre na aprendizagem significativa.

Na aprendizagem superordenada ou combinatória as ideias estabelecidas na estrutura cognitiva podem tornar-se reconhecíveis enquanto relacionadas, no curso da nova aprendizagem. Por exemplo, os estudantes podem ter a ideia de limite com relação a uma distância a ser percorrida, mas quando estudam o Limite em Cálculo 1, aparece a fórmula de limite, eles não conseguem entender o conceito, o que poderá ser resolvido quando aprendem novos significados combinatórios, como por exemplo através do problema que envolve a reta tangente e o problema da velocidade.

O princípio da reconciliação integradora também se aplica quando o assunto é organizado em linhas paralelas, isto é, quando materiais relacionados são apresentados em série, mas sem nenhuma dependência sequencial de um tópico a outro. Diferentemente do caso dos assuntos sequencialmente dependentes, as tarefas de aprendizagem sucessivas são inerentemente independente umas das outras no sentido de que compreender o material da Parte II não pressupõe a compreensão do material da Parte I. Cada conjunto de materiais é, logicamente, autocontido e pode ser adequadamente aprendido por si só sem qualquer referência ao outro; a ordem de apresentação é, portanto, irrelevante.

Não obstante, embora as tarefas de aprendizagem sucessivas do material organizado de forma paralela não sejam intrinsecamente dependentes umas das outras, obviamente ocorre muita interação cognitiva entre as mesmas. Elementos previamente aprendidos de uma sequência paralela desempenham um papel orientador e subordinador em relação aos elementos apresentados posteriormente. Estes últimos são compreendidos e interpretados em termos de entendimentos existentes e paradigmas oferecidos por ideias análogas, familiares, previamente aprendidas e já estabelecidas na estrutura cognitiva. Portanto, para que a aprendizagem de novas ideias não familiares ocorra, as ideias devem ser adequadamente discriminadas daquelas familiares estabelecidas. Caso contrário, os novos significados serão tão imbuídos de ambiguidades, concepções errôneas e confusões que serão parcialmente ou completamente não existentes de direito próprio. Se, por exemplo, o estudante não pode discriminar entre a nova ideia de A e a velha ideia A, A' não existe realmente para ele; fenomenologicamente, é o mesmo que A. além do mais, mesmo se o aprendiz puder discriminar entre A e A no momento da aprendizagem, a discriminação tem que ser precisa e livre de ambiguidade e confusão. Se isto não ocorrer, haverá uma tendência de reduzir A' a A com o tempo (à medida que as duas ideias interagem durante o intervalo de retenção), mais rapidamente do que geralmente ocorre.

Em alguns casos de aprendizagem significativa e retenção, a principal dificuldade não é a de discriminabilidade, mas de uma aparente contradição entre ideias estabelecidas na estrutura cognitiva e as novas proposições do material de aprendizagem. Sob estas condições, o estudante pode sumariamente afastar as novas proposições como não sendo válidas, pode tentar compartimentalizá-las como entidades isoladas afastadas do conhecimento prévio aprendido; ou esperançosamente pode tentar uma reconciliação integrativa sob um subordinador mais inclusivo.

Desta forma, um organizador deveria, em primeiro lugar, delinear de modo claro, preciso e explícito, as principais semelhanças e diferenças entre os novos conceitos e princípios subordinadores a serem aprendidos, de um lado, e, de outro, entre as ideias similares estabelecidas na estrutura cognitiva. Neste caso, parece razoável postular que a discriminabilidade aumentada das novas ideias de esteio capacitaria o estudante a mais tarde compreender as ideias e informações mais detalhadas do trecho a ser aprendido com menos ambiguidade, menos significados competidores e menos concepções errôneas sugeridas pelas ideias estabelecidas do que seria possível de outra forma.

Além do mais, como estes novos significados mais claros, mais discrimináveis e menos confusamente diferenciados interagem com os seus subordinadores e com os significados análogos, estabelecidos durante o intervalo de retenção, também manteriam a sua identidade por mais tempo. Isto é verdadeiro porque o novo material é inicialmente aprendido de maneira clara, mais estável e mais discriminável, em função da maior discriminabilidade das novas ideias de esteio às quais é subordinado. Além disso, subordinadores mais diferenciados são em si mais estáveis e, portanto mais capacitados a oferecer um esteio seguro continuado.

2.3 Organizadores Antecipatórios

Esta é a principal estratégia proposta por Ausubel para deliberadamente manipular a estrutura cognitiva de modo a aumentar a facilitação proativa e a minimizar a interferência proativa. Envolve o uso de materiais adequados relevantes e introdutórios (organizadores) que devem ser extremamente claros e estáveis.

Estes organizadores são normalmente introduzidos antes do próprio material de aprendizagem e são usados para facilitar o estabelecimento de uma disposição significativa para a aprendizagem. Os organizadores antecipatórios ajudam o estudante a reconhecer que elementos dos materiais de aprendizagem podem ser significativamente aprendidos relacionando-os com aspectos especificamente relevantes da estrutura cognitiva existente.

Com o objetivo de funcionar para uma variedade de estudantes, cada qual com uma estrutura cognitiva um tanto idiossincrática, e de fornecer ideias de esteio num nível superordenado, os organizadores devem ser apresentados num nível de abstração mais elevado, com maior generalidade e inclusividade, do que o novo material a ser aprendido.

Segundo Ausubel (1980) as razões para utilização de organizadores baseiam-se primariamente em:

1. A importância de ter ideias estabelecidas relevantes e apropriadas já disponíveis na estrutura cognitiva para tornar logicamente significativa as ideias novas potencialmente significativas e lhes dar um esteio estável.
2. As vantagens de usar as ideias mais gerais e inclusivas de uma disciplina como ideia de esteio ou subordinadores (a saber, a adequação e a especificidade da sua relevância, sua maior estabilidade inerente, seu maior poder explanatório e sua capacidade de integração).
3. O fato de que eles próprios tentam tanto identificar um conteúdo relevante já existente na estrutura cognitiva (e ser explicitamente relacionado com ele) como indicar explicitamente a relevância deste conteúdo e a sua própria relevância para o novo material de aprendizagem.

2.3.1 Função dos organizadores prévios

A principal função do organizador prévio está em preencher o hiato entre aquilo que o estudante já conhece e o que precisa conhecer antes de poder aprender significativamente a tarefa com que se defronta. Um organizador antecipatório oferece uma armação ideativa para a incorporação estável e retenção do material mais detalhado e diferenciado que se tem que aprender. Outra função é aumentar a discriminabilidade entre este último material e ideias ou ostensivamente conflitantes na estrutura cognitiva.

No caso de um material relativamente pouco familiar, um organizador “expositivo” é usado para oferecer subordinadores próximos relevantes. Estes subordinadores, que têm relação de superordenação com o novo material a ser aprendido, primariamente oferecem um esteio ideativo em termos que já são familiares ao estudante. Mas, no caso desse material de aprendizagem ser relativamente familiar, é usado um organizador “comparativo” tanto para integrar as ideias novas com conceitos basicamente similares na estrutura cognitiva como para aumentar a discriminabilidade entre ideias já existentes e as novas que são essencialmente diferentes, mas que podem produzir alguma confusão.

A vantagem de elaborar deliberadamente um organizador especial para cada unidade de material é que só assim o estudante pode aproveitar-se das vantagens de um subordinador, que lhe dá uma visão geral do material mais detalhado antes de sua confrontação com o mesmo, também oferece elementos organizadores que são inclusivos e levam em consideração o conteúdo particular contido neste material.

Ausubel (1980) chama a atenção para o caso do estudante desejar empregar com o mesmo propósito, independentemente, qualquer subordinador existente em sua estrutura cognitiva, por carecer de relevância particularizada e de inclusividade para o novo material e, porque dificilmente estaria à disposição antes do contato inicial com o mesmo. Ele afirma que possivelmente os estudantes poderiam ser capazes de improvisar um subordinador adequado para futuros esforços de aprendizagem depois de se tornarem familiarizados com o material. É pouco provável que eles sejam capazes de fazê-lo tão eficientemente como o professor habilidoso, que é exigente tanto no conteúdo quanto na pedagogia.

Os organizadores facilitam consideravelmente a aprendizagem do material factual mais do que a aprendizagem de material abstrato, uma vez que as abstrações, em certo sentido contêm os seus próprios organizadores – tanto para si mesmos como para itens detalhados relacionados (AUSUBEL, 1980).

Ausubel (1980) aconselha utilizar organizadores com material de aprendizagem que possa abranger um corpo substancial de conteúdo diferenciado ou factual, uma vez que tais materiais oferecem o escopo máximo para armação ideacional apresentada pelos organizadores abstratos.

O valor pedagógico dos organizadores antecipatórios depende, em parte, de quão bem organizado é o próprio material de aprendizagem. Se já contém organizadores incorporados e procede de regiões de menor a maior diferenciação (maior a menor inclusividade) ao invés da apresentação típica do livro-texto. Assim, Não importa quão bem organizado seja o material de aprendizagem, ainda assim é razoável esperar que a aprendizagem e a retenção possam ser facilitadas para a maioria dos estudantes pelo uso de organizadores antecipatórios num nível apropriado de inclusividade.

Estes organizadores devem estar disponíveis desde o início da tarefa de aprendizagem. Suas propriedades integrativas também são muito mais evidentes do que quando são introduzidos concorrentemente com o material a ser aprendido. Para serem uteis, porém, os próprios organizadores devem obviamente ser passiveis de apreensão e devem ser apresentados em termos familiares.

Para Ausubel (1980) os organizadores antecipatórios provavelmente facilitam a possibilidade de incorporação e longevidade do material aprendido significativamente de três maneiras diferentes.

> 1) Eles explicitamente se apoiam em (e mobilizam) quaisquer conceitos de esteio relevantes já estabelecidos na estrutura cognitiva do estudante, tornando-os parte de entidade subordinadora. Desta forma, não apenas o novo material se torna mais familiar e potencialmente mais significativo, como os antecedentes ideacionais mais relevantes na estrutura cognitiva também são selecionados e utilizados de forma integrada.

> 2) Os organizadores antecipatórios num nível adequado de inclusividade, tornando possível a subordinação com base em proposições especificamente relevantes oferecem um esteio ótimo. Isto tanto fomenta a aprendizagem inicial como a resistência ulterior a uma subordinação obliteradora.
>
> 3) O uso dos organizadores antecipatórios torna desnecessária muito da memorização mecânica à qual os estudantes tantas vezes recorrem porque se exige que aprendam os detalhes de uma disciplina não familiar antes de terem disponível um número suficiente de ideias de esteio chaves. Por causa da falta de disponibilidade de tais ideias na estrutura cognitiva às quais os detalhes podem ser relacionados não arbitrariamente e substantivamente, o material, embora logicamente significativo, carece de significância potencial.

Além disso, a construção de um dado organizador sempre depende da natureza do material de aprendizagem, da idade do estudante e do seu grau de familiaridade prévia com a passagem a ser aprendida.

Ausubel sugere que não necessariamente devem-se aplicar todos os meios pedagógicos sugeridos por ele em uma prática docente, mas escolher o mais adequado para atender ao objetivo desejado.

2.4 A Teoria da Assimilação Segundo Ausubel

Como o foco de nosso estudo é um processo de ensino aprendizagem fundamentado na aprendizagem significativa, não poderíamos deixar de mencionar a teoria da assimilação da aprendizagem humana proposta por Ausubel.

Ausubel (1980) ressalta que a aquisição de novas informações depende amplamente das ideias relevantes que já fazem parte da estrutura cognitiva por isso, a aprendizagem significativa nos seres humanos ocorre por meio de uma interação entre o novo conteúdo e aquele já adquirido. O resultado desta interação que ocorre entre o novo material e a estrutura cognitiva existente, é a assimilação dos significados velhos e novos, dando origem a uma estrutura mais altamente diferenciada.

O foco principal na teoria da assimilação defendida por Ausubel está no papel de elementos relevantes da estrutura cognitiva (subsunçores) para obter uma aprendizagem significativa. Além disso, a consideração adicional da diferenciação progressiva de subsunçores, aprendizado superordenado e harmonia integrativa emprestam relevância ao planejamento de currículo e planejamento de ensino. Se o aprendizado deve ser significativo, então o novo conhecimento a ser aprendido deve vincular-se a conceitos relevantes seguros disponíveis na estrutura cognitiva do estudante.

Para efeito de nossa pesquisa o processo escolhido para o desenvolvimento da sequência didática do conteúdo de limite foi o da aprendizagem superordenada.

Segundo Ausubel (1980) a *aprendizagem superordenada* (Quadro 2) acontece quando se aprende um novo conceito ou uma proposição inclusiva que condicionará ao surgimento de várias outras ideias. Este tipo de aprendizagem ocorre no curso do raciocínio ou quando o material apresentado é organizado indutivamente ou envolve a síntese de ideias compostas.

Quadro 2

APRENDIZAGEM SUPERORDENADA: Nova ideia **A** → **A**

Ideias estabelecidas $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_2}$ $\mathbf{a_3}$

Na aprendizagem superordenada, as ideias estabelecidas $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ são consideradas como exemplos mais específicos da nova ideia **A** e passam a associar-se a **A**. A ideia superordenada **A** é definida por um novo conjunto de atributos essenciais que abrange as ideias subordinativas.

Fonte: Ausubel (1980, p. 57)

Para Ausubel (1980, p. 50) a aquisição de significado superordenado ocorre mais comumente na aprendizagem conceitual do que na aprendizagem proposicional. E, ainda, que os conceitos podem ser aprendidos e retidos mais prontamente quando agrupados em ideias especificamente relevantes.

A teoria da assimilação enfatiza a importância de conceitos superordenados para facilitar o novo aprendizado através da subsunção de informação ou conceitos novos e relevantes (AUSUBEL, 1980, P. 303).

Para melhor compreendermos a aquisição, fixação e organização de significados na estrutura cognitiva, é necessário focarmos um pouco mais sobre o princípio da assimilação.

Segundo Ausubel (1980) a essência da teoria da assimilação é a ideia de que novos significados são adquiridos pela interação do novo conhecimento com os conceitos e proposições aprendidos anteriormente. Esse processo de interação resulta numa modificação tanto do significado da nova informação quanto do significado do conceito ou proposição ao qual está relacionada. Dessa forma cria-se um novo produto interacional com novo significado.

Este processo de assimilação sequencial de novos significados resulta na diferenciação progressiva dos conceitos ou proposições com o conseguinte refinamento dos significados e um aumento potencial para a criação de uma base para posterior aprendizagem significativa. Quando conceitos ou proposições estão relacionados por meio de uma nova aprendizagem superordenada ou combinatória, surgem novos significados, e significado conflitantes podem ser resolvidos através da reconciliação integradora. Por sua vez, à medida que o processo de assimilação continua os significados dos conceitos ou proposições componentes não mais se dissociam de suas ideias básicas. O resultado é o bloqueio da assimilação ou esquecimento significativo.

Supõe-se que a assimilação aumenta o poder de fixação de três maneiras diferentes. Em primeiro lugar, tornando-se "apoiada", por assim dizer, a uma forma modificada de uma ideia existente altamente estável na estrutura cognitiva, o novo significado altera o equilíbrio da última [5]. Em segundo lugar, este tipo de "apoio", continuando durante o armazenamento da relação arbitrária, original, entre a nova ideia estabelecida, também protege o significado da interferência exercida pelas experimentadas diariamente e pelas semelhantes posteriormente encontradas.

Esta interferência é bastante prejudicial quando o material de aprendizagem é relacionado arbitrariamente à estrutura cognitiva, como ocorre na aprendizagem automática. Em terceiro lugar, o fato de nova ideia significativa ser armazenada na relação com ideias particulares mais relevantes na estrutura cognitiva (ou seja, com as ideias com as quais esteve originalmente relacionada na aquisição de seu significado) torna presumivelmente a memorização um processo menos arbitrário e mais sistemático.

A hipótese para a assimilação segundo Ausubel (1980) é que novas ideias podem ser armazenadas na relação com ideias existentes correspondentes

---

[5] Convém, daqui por diante, referir-se à ideia relevante **A** estabelecida na estrutura cognitiva para a qual a nova ideia potencialmente significativa **a** é relatada como "ideia básica". Entretanto, falando em sentido restrito, a ideia básica real (após a inclusão) é **A'** – e não **A**; mas esta diferença pode ser ignorada para fins práticos, visto que **A'** e **A** não diferem muito entre si. Mas, é importante ter em mente que não é **a** que está subordinada a **A**, e sim **a'** (o significado de **a**).

relevantes na estrutura cognitiva e, Além disso, presume-se que um membro do par associado é geralmente sobreordenado ou mais inclusivo que o outro, e que o membro sobreordenado (pelo menos quando está estabelecido) é o membro mais estável do par. Segue necessariamente que o resíduo cumulativo daquilo que é aprendido, fixado e esquecido (a estrutura psicológica do conhecimento ou estrutura cognitiva como um todo) submete-se *ao princípio organizacional da diferenciação progressiva*.

Consequentemente, se a assimilação fosse operativa na estocagem de ideias significativas, então seria bastante compreensível por que uma organização mental individual do conteúdo de uma disciplina particular exemplifica uma pirâmide ordenada hierarquicamente. As ideias mais inclusivas e amplamente explicativas ocupam uma posição no ápice da pirâmide e englobam progressivamente as ideias menos inclusivas, ou mais altamente diferenciadas, cada uma associada a um nível mais alto e complexo da hierarquia, através dos elos assimilativos.

Para Ausubel (1980) é provável que o processo de assimilação tenha um efeito geralmente facilitador sobre a memorização. Entretanto, para que os significados recentemente assimilados tornem-se disponíveis durante o período de fixação, deve-se admitir que, por um período variável de tempo, sejam dissociáveis de suas ideias básicas e, portanto, sejam reproduzíveis enquanto entidades individualmente identificáveis. Com isto, conforme foi mostrado no Quadro 3, o significado recentemente aprendido e assimilado **a’** é inicialmente dissociável de sua relação com a ideia básica **A’**. O produto interacional **A’a’**, em outras palavras, dissocia-se em **A’** e **a’**. A experiência universal indica que o grau de dissociação, ou a força dissociativa se encontra no limite máximo após a aprendizagem, e, portanto, que os novos significados, na ausência da prática direta ou indireta, estão disponíveis ao máximo naquela ocasião.

2.4.1 O Processo de Assimilação na Aquisição, fixação e Organização do Conhecimento.

Para melhor compreender-se a aquisição, fixação e organização de significados na estrutura cognitiva, é necessário focarmos um pouco mais sobre o princípio da assimilação.

Quando uma ideia **a** é aprendida significativamente e relacionada à ideia relevante estabelecida **A**, tanto as ideias são modificadas como **a** é assimilada pela ideia estabelecida **A**. Isso tanto pode servir como exemplo da aprendizagem subordinativa derivativa ou correlativa.

A ideia básica ("ideia esteio") **A** e a nova ideia **a** sofrem modificações, formando o produto da interação **A'a'**.

Para ser mais claro, tomando como hipótese que o produto interacional real ou total da nova ideia e da ideia estabelecida é maior e mais complexo do que já foi descrito anteriormente. Aqui é que o processo de assimilação entra no quadro. Deve-se examinar mais de perto a nova aquisição de **a** e a recordação ou dissociação de **a'** a partir de **A'**, e a eventual perda de dissociação de **a'** a partir de **A'.** Estes processos estão descritos no Quadro 3.

Observa-se que tanto a ideia potencialmente significativa **a** quanto a ideia estabelecida **A**, à qual ela se apoia, sofrem também transformações através do processo interacional. Isto está indicado no Quadro 3 pelo emprego do primeiro signo em cada caso.

O mais importante é que tanto os produtos interacionais **a'** e **A** permanecem em relação recíproca quanto em relação aos membros correlatos de uma unidade composta ou complexo adicional **A'a'**.

No sentido mais completo do termo, portanto, o produto interacional real do processo de aprendizagem significativa não é exatamente o novo significado de **a'**, mas inclui a modificação da ideia básica e *é o significado composto **A'a'***. Assim, o processo de subordinação forma uma nova ideia composta, que pode servir como base de futuras transformações. Portanto, a assimilação não se completa após a aprendizagem significativa, mas continua em etapas subsequentes, acarretando a aprendizagem futura de uma nova ideia ou a perda eventual da recuperação de ideias subordinativas. Estes processos estão descritos no Quadro 3, onde também podemos perceber as etapas desse processo.

Quadro 3

Estágios na Aprendizagem e Memorização de uma Ideia Subordinada em Relação à sua Força Dissociativa					
I	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA OU	Nova ideia potencialmente	Relacionada a e	Ideia A estabelecida na	Produto

	AQUISIÇÃO DE SIGNIFICADO SUBORDINADO a’	significativa a	assimilada por	estrutura cognitiva	interacional A’a’
II	APRENDIZAGEM POSTERIOR E RETENÇÃO INICIAL DO SIGNIFICADO a’	Novo significado a’ é dissociável de A’a’	A’a’ ↔ A’ + a’ (alta força dissociativa)		
III	RETENÇAO POSTERIOR DO SIGNIFICADO a’	Perda gradativa da dissociação de a’ a partir de A’a’	A’a’ ↔ A’ + a’ (baixa força dissociativa)		
IV	ESQUECIMENTO DO SIGNIFICADO a’	a’ não é mais dissociável eficazmente de A’a’		Dissociação de a’ a partir de A’a’ está abaixo do limiar de disponibilidade: a’ é reduzido a A’.	

Fonte: Quadro 4-1 (AUSUBEL, 1980, p. 105)

Segundo Ausubel (1980) a essência da teoria da assimilação é a ideia de que novos significados são adquiridos pela interação do novo conhecimento com os conceitos e proposições aprendidos anteriormente. Esse processo de interação resulta numa modificação tanto do significado da nova informação quanto do significado do conceito ou proposição ao qual está relacionada. Dessa forma cria-se um novo produto interacional com novo significado.

Este processo de assimilação sequencial de novos significados resulta na diferenciação progressiva dos conceitos ou proposições com o conseguinte refinamento dos significados e um aumento potencial para a criação de uma base para posterior aprendizagem significativa. Quando conceitos ou proposições estão relacionados por meio de uma nova aprendizagem superordenada ou combinatória, surgem novos significados, e significado conflitantes podem ser resolvidos através da reconciliação integradora. Por sua vez, à medida que o processo de assimilação continua os significados dos conceitos ou proposições componentes não mais se dissociam de suas ideias básicas. O resultado é o bloqueio da assimilação ou esquecimento significativo.

2.4.2 O Valor explicativo da assimilação

A teoria da assimilação tem valor explicativo tanto para o fenômeno da memorização quanto para o fenômeno da aprendizagem, porque tanto é responsável pela longevidade da memorização de ideias aprendidas significativamente como pela forma como o conhecimento é organizado na estrutura cognitiva (AUSUBEL, 1980, p. 107).

Supõe-se que a assimilação aumenta o poder de fixação de três maneiras diferentes. Em primeiro lugar, tornando-se "apoiada", por assim dizer, a uma forma modificada de uma ideia existente altamente estável na estrutura cognitiva, o novo significado altera o equilíbrio da última [6]. Em segundo lugar, este tipo de "apoio", continuando durante o armazenamento da relação arbitrária, original, entre a nova ideia estabelecida, também protege o significado da interferência exercida pelas experimentadas diariamente e pelas semelhantes posteriormente encontradas. Esta interferência é bastante prejudicial quando o material de aprendizagem é relacionado arbitrariamente à estrutura cognitiva, como ocorre na aprendizagem automática. Em terceiro lugar, o fato de uma nova ideia significativa ser armazenada na relação com ideias particulares mais relevantes na estrutura cognitiva (ou seja, com as ideias com as quais esteve originalmente relacionada na aquisição de seu significado) torna presumivelmente a memorização um processo menos arbitrário e mais sistemático.

A hipótese para a assimilação segundo Ausubel (1980) é que novas ideias podem ser armazenadas na relação com ideias existentes correspondentes relevantes na estrutura cognitiva e, Além disso, presume-se que um membro do par associado é geralmente sobreordenado ou mais inclusivo que o outro, e que o membro sobreordenado (pelo menos quando está estabelecido) é o membro mais estável do par. Segue necessariamente que o resíduo cumulativo daquilo que é aprendido, fixado e esquecido (a estrutura psicológica do conhecimento ou estrutura cognitiva como um todo) submete-se *ao princípio organizacional da diferenciação progressiva*. Consequentemente, se a assimilação fosse operativa no acúmulo de ideias significativas, então seria bastante compreensível por que uma organização mental individual do conteúdo de uma disciplina particular exemplifica uma pirâmide ordenada hierarquicamente. As ideias mais inclusivas e amplamente explicativas ocupam uma posição no ápice da pirâmide e englobam progressivamente as ideias

[6] Convém, daqui por diante, referir-se à ideia relevante **A** estabelecida na estrutura cognitiva para a qual a nova ideia potencialmente significativa **a** é relatada como "ideia básica". Entretanto, falando em sentido restrito, a ideia básica real (após a inclusão) é **A'** – e não **A**; mas esta diferença pode ser ignorada para fins práticos, visto que **A'** e **A** não diferem muito entre si. Mas, é importante ter em mente que não é **a** que está subordinada a **A**, e sim **a'** (o significado de **a**).

menos inclusivas, ou mais altamente diferenciadas, cada uma associada a um nível mais alto e complexo da hierarquia, através dos elos assimilativos.

Para Ausubel (1980) é provável que o processo de assimilação tenha um efeito geralmente facilitador sobre a memorização. Entretanto, para que os significados recentemente assimilados tornem-se disponíveis durante o período de fixação, deve-se admitir que, por um período variável de tempo, sejam dissociáveis de suas ideias básicas e, portanto, sejam reproduzíveis enquanto entidades individualmente identificáveis.

Com isto, conforme foi mostrado no Quadro 3, o significado recentemente aprendido e assimilado **a’** é inicialmente dissociável de sua relação com a ideia básica **A’**. O produto interacional **A’a’**, em outras palavras, dissocia-se em **A’** e **a’**. A experiência universal indica que o grau de dissociação, ou a força dissociativa se encontra no limite máximo após a aprendizagem, e, portanto, que os novos significados, na ausência da prática direta ou indireta, estão disponíveis ao máximo naquela ocasião.

2.4.3 Redução da Memória e a Subordinação Obliteradora

Segundo Ausubel (1980) o processo de assimilação tem a capacidade de assegurar a fixação superior das ideias adquiridas significativamente, o que implica também num mecanismo razoável do esquecimento subsequente dessas ideias, principalmente a “redução” gradual de seus significados com os significados das ideias básicas correspondentes às quais estão associadas.

Neste processo a retenção dos significados recentemente adquiridos pode ser aumentada pela relação de apoio com ideias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva do estudante, porém, este conhecimento ainda está sujeito a ser reduzido ou completamente esquecido, ou seja, o significado das novas ideias tende a ser assimilado ou reduzido, durante o decorrer do tempo, com relação aos significados mais estáveis das ideias básicas estabelecidas.

Como consequência disso, imediatamente após a aprendizagem, ocorre o segundo estágio bloqueador da assimilação**,** em que as novas ideias tornam-se espontânea e, progressivamente menos dissociável de suas ideias básicas enquanto entidades independentes, até que deixam de ser disponíveis e são esquecidas. Quando a força de dissociação de **a’** cai abaixo de certo nível crítico (o limiar da disponibilidade) não pode ser mais evocada. Eventualmente, atinge-se a dissociação zero e **A'a'** é posteriormente reduzido ao próprio **A'**, a ideia básica original agora modificada.

Ausubel (1980, p. 108) pede atenção para um fato bastante relevante que ocorre na aprendizagem significativa: "o novo material original **a** nunca poderá ser lembrado precisamente da mesma forma que foi apresentado".

O processo de subordinação que ocorre na assimilação de **a,** provoca também uma alteração de **a** para **a'**, e, portanto, inicia-se uma *supressão ou obliteração das ideias subordinativas,* ao mesmo tempo em que ocorre a aprendizagem significativa. Por esta razão, as práticas de avaliação que requerem a exata repetição da informação ou ideia aprendida desencorajam a aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1980, p. 108).

O conceito de *um limiar variável de disponibilidade* é útil, pois se explicam as flutuações transitórias na disponibilidade, que são atribuídas às variáveis cognitivas e motivacionais gerais (atenção, ansiedade, mudança de disposição ou contextos, liberação da repressão), sem qualquer alteração na força dissociativa (a força intrínseca do item na memória) propriamente dita. Explica-se também por que tais itens podem ser reconhecidos, mas não evocados.

A partir desse processo de assimilação Ausubel (1980) afirma que *o esquecimento* é uma continuação ou uma fase temporal posterior do mesmo processo assimilativo subjacente à disponibilidade de ideias recentemente adquiridas. E a mesma relação não arbitrária com uma ideia relevante estabelecida na estrutura que é necessária para a aprendizagem significativa de uma nova ideia, e que motiva um aperfeiçoamento da memorização através do processo de sustentar o significado emergente na mesma base de apoio da ideia estabelecida, é a base do mecanismo de grande parte do esquecimento posterior.

Vê-se no princípio de inclusão, portanto, uma economia de pensamento (ou de paciência). O mesmo princípio explica por que há variações individuais de aprendizagem significativa (dependendo em parte, da disponibilidade e grau de diferenciação das ideias subordinativas relevantes) e por que se devem esperar diferentes períodos de memorização (dependendo, em partes, dos fatores que influenciam no bloqueio das ideias subordinativas ou inclusivas).

Ausubel (1980) compara este processo de redução de memória com o processo de redução que caracteriza a formação de conceito já que um único conceito abstrato é mais manipulável pela estrutura cognitiva, assim como é também mais funcional para aprendizagem futura e, para as operações de solução de problema, quando retirado dos significados menos estáveis assimilados por elas.

Portanto, as ideias recentementes adquiridas que estão relacionadas aos sistemas ideacionais estabelecidos tendem, gradual e espontaneamente, a tornarem-se indissociáveis de suas ideias básicas (“esteio de ideias”). Ou seja, formam *a base da assimilação obliteradora* e são esquecidas. Consequentemente, esquecer representa uma perda progressiva na dissociação das ideias recentemente assimiladas a partir da matriz ideacional na qual se fundamentam e em relação à qual seu significado emerge.

Infelizmente, segundo Ausubel (1980) as vantagens da assimilação obliteradora para o funcionamento cognitivo são ganhas à custa da perda da estrutura diferenciada das proposições detalhadas e informação específica que constitui a capa, senão a estrutura, de qualquer corpo de conhecimento. Portanto, o problema principal na aquisição de conteúdo de uma disciplina acadêmica é contrapor-se ao processo inevitável da assimilação obliteradora que caracteriza toda a aprendizagem significativa.

No caso da aprendizagem subordinativa o processo de assimilação obliteradora, enquanto um fenômeno de redução parece bastante direto: o significado menos instável (e mais específico) de uma ideia subordinativa é gradualmente incorporado e reduzido ou reduzido ao significado mais estável (e mais inclusivo) da ideia especificamente relevante na estrutura cognitiva que o assimila.

Mas, o que dizer do esquecimento do aprendizado sobreordenado (superordenado), que por definição, é mais generalizado e inclusivo desde o início do que as ideias subordinativas estabelecidas na estrutura cognitiva por eles assimilados? Segundo Ausubel, aqui o processo de assimilação obliteradora deve obviamente conformar-se a algum paradigma diferente, uma vez que as ideias básicas mais estáveis neste caso são menos inclusivas do que os novos significados sobreordenados que eles assimilam.

Pelo menos inicialmente, enquanto um novo significado sobreordenado (superordenado) é relativamente instável, é reduzido às suas ideias básicas menos inclusivas (subordinadas) durante o processo da assimilação obliteradora. Mais tarde, entretanto, se e quando a ideia superordenada for posteriormente diferenciada, ela tende a tornar-se mais estável do que as ideias subordinadas que originalmente a assimilaram, enquanto que a estabilidade de uma ideia na memoria tende a aumentar com seu nível de generalização e inclusão. Consequentemente, neste ponto, inverte-se a direção da assimilação obliteradora: os significados menos inclusivos e agora menos estáveis das primeiras ideias subordinadas adquiridas tendem a ser incorporados ou reduzidos aos significados mais generalizados dos significados mais estáveis e mais recentemente adquiridos da ideia superordenada (ver Quadro 4)[7].

Quadro 4

Estágios na Aprendizagem e Memorização de uma Ideia Superordenada em Relação à Dissociação				
I Aprendizagem significativa ou aquisição de significado sobreordenado **A’**	Nova ideia Potencialmente Significativa **A**	Relacionada a e assimilada por	Ideias Estabelecidas **a** e **a**	Produto interacional **a’a’A’**
II Aprendizagem posterior e retenção inicial de **A’**	Novo significado **A’** é dissociável a partir de **a’a’A’**	**a’a’A <-> a’+a’+ A’**		
III Esquecimento de **A’**	**A’** não é mais eficazmente dissociável a partir de **a’a’A’**	**A’** é reduzida a **a’+a’**		
IV Diferenciação posterior de **A’**	**a’** e **a’**	Subordinada **a**	Ideia **A’** Estabelecida e Mais Estável	Produto Interacional **A’a’a’**
V Retenção posterior de **a’ e a’**	**a’ e a’** são dissociáveis de **A’a’a’**	**A’a’a’ <-> A’+a’+a’**		
VI Esquecimento de **a’ e a’**	**a’ e a’** não dissociáveis eficazmente de **A’a’a’**	**a’** e **a’** são reduzidas a **A’**		

Fonte: (Ausubel, 1989, p. 109) Quadro 4-2.

[7] Ausubel aconselha procurar pacientemente reconciliar integralmente sua compreensão deste quadro com os significados do Quadro 1

A dinâmica subjacente à aprendizagem significativa, fixação e esquecimento de ideias pode ser avaliada de modo mais completo considerando-se certos aspectos minuciosos do processo interacional e assimilativo que ainda não foram mencionados. Consultando mais uma vez o quadro 3, consideremos, por exemplo, a história natural de um conceito correlato potencialmente significativo ou proposição a, que o estudante relaciona à proposição **A** especificamente relevante, mais inclusiva e estável, estabelecida em sua estrutura cognitiva. Em consequência do processo subordinativo, o produto interacional **A'a'** é formado de tal forma que os componentes originais são modificados como resultado desta interação.

Entretanto, afirmar que o novo item de aprendizagem forma apenas um único produto interacional com **A** é simplificar demais, pois até certo ponto, forma outros produtos interacionais com outras ideias, que poderíamos designar de B, C, D, E, e assim por diante. A quantidade de assimilação é aproximadamente proporcional ao último lugar ao longo de um gradiente de relevância. Nessa interação, também a ideia subordinativa (inclusiva) é, em geral, modificada consideravelmente por uma nova experiência particular. Seus atributos essenciais, por exemplo, podem ser ampliados para incluir novas características que foram anteriormente excluídas, ou podem tornar-se menos inclusivas, excluindo características que antes haviam sido incluídas.

Neste novo produto interacional, **A'a', a'** não perde completamente sua identidade, uma vez que o equilíbrio da dissociação, **A'a'** ↔ **A' + a'** é estabelecido de tal forma que **a'**, dependendo das condições dominantes, tem um determinado grau de dissociação enquanto uma entidade identificável.

Segundo Ausubel, não se pode ter acesso aos itens assinalados antes que se atinja o ponto de dissociação zero, já que não são mais disponíveis quando estão abaixo do *limiar de disponibilidade* prevalecente (o nível crítico de força que um determinado item deve manifestar a fim de ser lembrado). Grande parte da força dissociativa residual encontra-se entre o nível baixo do limiar e ponto zero de dissociação, mas não o suficiente para tornar o item disponível sob condições ordinárias de reconhecimento ou recordação. A existência de limiar baixo de dissociação pode ser demonstrada pelo uso da hipnose[8] que rebaixa muitíssimo o limiar de disponibilidade para todos os itens, implicando que muitos itens que estão

[8] (Nagge, 1935; Rosenthal, 1944) apud Ausubel, (1980, p. 111).

abaixo do nível de disponibilidade tornam-se disponíveis quando do uso dessa técnica.

Segundo Ausubel (1980, p. 111) a reaprendizagem demonstra também a força da dissociação subliminar (Burtt, 1941), ou seja, o fato de que os assuntos esquecidos podem ser reaprendidos efetivamente e em menor tempo do que o exigido para a aprendizagem original é uma prova ampla da existência da força de dissociação subliminar; devido a sua presença, é necessária menor aprendizagem nova para atingir-se qualquer nível de limiar.

Esse conceito de equilíbrio dissociativo, no qual uma ideia assimilativa torna-se gradativa e espontaneamente menos dissociativa do sistema ideacional estabelecido com o qual está relacionado, e de onde deriva seu significado, tem valor heurístico considerável. É responsável tanto pela disponibilidade original do significado recentemente aprendido quanto pelo declínio gradual subsequente em sua disponibilidade durante o intervalo de fixação e o esquecimento decorrente.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

A Resolução de Problemas, ao longo da história, vem contribuindo para o desenvolvimento da Matemática. É ampliando os conhecimentos e sabendo utilizá-los que se torna possível resolver, a cada dia, problemas mais complexos. Prova disso é a rapidez com que os avanços tecnológicos e científicos estão se processando e, a ciência nos proporciona usufruir desse progresso a cada dia.

Observa-se que um novo tipo de ensino passou a ser desenvolvido para atender a demanda por um panorama educacional mais amplo e eficiente que foca na capacidade cognitiva do educando. Desse modo, resolvemos desenvolver nosso estudo sobre a aplicação de uma estratégia de resolução de problema concomitante com uma teoria da aprendizagem em uma sequência didática (limite) na disciplina de Cálculo 1. A aplicação da metodologia de resolução de problemas vem sendo enfatizada na Educação Básica há pelo menos três décadas em nosso país com o objetivo de motivar os estudantes para a obtenção de uma aprendizagem significativa. Entretanto, ainda se encontra práticas docentes tradicionais em sala de aula. A situação é mais agravante no ensino da matemática que a cada dia parece piorar

Conforme Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB - 2011)[9], temos os seguintes resultados para o ensino da matemática na tabela 1, da região Norte, da qual enfatizamos o nosso Estado de Roraima:

Tabela 1

MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO – ANEB (2011)

	Região Norte	Estado de Roraima
Escola pública	249,6	256,6
Escola privada	310,6	317,5

Fonte: Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

Pelos critérios de avaliação (ANEB - 2011) do Ensino Médio o nível de desempenho varia de 250 – 425 ou mais. O nível é medido de acordo com os temas e não com a complexidade da habilidade, por exemplo:

[9] http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-anresc (em 07.07.2014).

O primeiro nível de 250 a 300 refere-se a (1) se os estudantes utilizam o conceito de PA; (2) Interpretam tabelas de dupla entrada com dados reais. No segundo item o nível varia de 200 a 350 para os seguintes temas: (1) Se os estudantes resolvem problemas calculando o valor numérico de uma função identificando uma função de 1º grau; (2) Se identificam em um gráfico de função o comportamento de crescimento/decrescimento; (3) Se identificam o gráfico de uma reta dada sua equação. Os níveis estão definidos assim: 250 a 300; 300 a 350; 375 a 400; 400 a 425; 425 a mais.

Como podemos observar na Tabela 1, o total referente às escolas públicas no total da região Norte não atinge nem o primeiro nível, já as escolas privadas estão um pouco melhor, pois atinge o segundo nível. Com relação ao Estado de Roraima temos o seguinte: as escolas públicas estão no primeiro nível e as escolas privadas no segundo nível.

Mas este resultado que não é nada satisfatório não se reflete apenas para nossa região como podemos observar na Tabela 2, na qual constam todas as regiões do nosso país e, podemos observar os resultados para os níveis do Ensino Básico:

Tabela 2

RESULTADO DO DESEMPENHO EM MATEMÁTICA – ANEB 2011
BRASIL POR REGIÕES

Regiões/níveis de ensino	Norte	Sul	Sudeste	Nordeste	Centro-oeste
Séries iniciais	191,5	221,1	223,0	190,8	215,9
8ª série/9º ano	237,2	260,3	259,1	235,9	253,3
Ensino médio[10]	**254,5**	**289,8**	**284,8**	**256,6**	**278.6**

Fonte: Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas educacionais Anísio Teixeira

Pelos resultados apresentados na Tabela 2 para o Ensino Médio, podemos perceber que todas as regiões brasileiras não passaram do primeiro nível. Isto nos leva a refletir sobre o ensino e aprendizagem da Matemática em nosso país.

Sabemos que este problema não é de responsabilidade só da escola, dos professores ou apenas dos estudantes. Creio mesmo que é um problema cultural

[10] Grifo nosso.

em nosso país e, que se agrava mais em algumas regiões. É um problema que não poderá ser resolvido isoladamente, mas que o sistema brasileiro de educação deve se dar conta e promover ações para resolvê-lo. Contudo, também cabe a cada um de nós fazermos nossa parte, no que nos cabe, procurando nos capacitar e ampliar nossos conhecimentos com relação à Educação Matemática, à Psicologia Educacional e às novas demandas tecnológicas.

Nesta análise demos ênfase aos resultados do Ensino Médio, pois esta fase reflete no nível seguinte – o Ensino Superior. É o que os professores de matemática têm observado: os estudantes estão iniciando esta etapa com o conhecimento matemático inadequado e insuficiente para assimilar os conhecimentos matemáticos mais complexos do nível superior.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I apresenta-se como um “bicho-papão” para a maioria dos estudantes, visto que o conhecimento sobre funções que deveriam assimilar no Ensino Médio é insuficiente, como pudemos perceber no resultado de desempenho apresentado pela ANEB (2011) e, esta situação do mau desempenho em matemática não é apenas da região Norte e, nem somente do Estado de Roraima.

Este foi um dos motivos que nos levaram a escolher a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no Nível Superior e, a unidade de Limite para observar como está se dando o processo de ensino aprendizagem. Neste nosso estudo, observamos uma proposta de sequência didática com a aplicação de uma estratégia de resolução de problemas fundamentada numa teoria da aprendizagem com o objetivo de promover uma aprendizagem significativa.

Desse modo, temos por aporte teórico os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica, o pensamento de alguns teóricos como Polya (1994), Dante (2009) e Mendoza (2009) e outros, especificamente da área da matemática. Partimos da premissa de que o conhecimento não pode ser colocado de forma estanque, pronto, mas que precisa ser ativamente construído pelos seus pares (professores e estudantes).

No âmbito do ensino da Matemática existem muitas dificuldades encontradas pelos professores que podem ser divididas em duas vertentes: uma é o conhecimento do conteúdo matemático e a outra é a prática pedagógica adequada para que o ensino resulte em aprendizagem. Para os professores de matemática é muito gratificante verificar que nos últimos tempos, também ocorreu uma transformação no que se refere à divulgação dos estudos e pesquisas em Educação Matemática que foi ampliada significativamente (CARVALHO, 2009, p.7).

Segundo Sánchez (2006, p.76) o papel que a “resolução de problemas” desempenha no ensino e na aprendizagem da matemática é tal, que a concepção dessa disciplina se enriqueceu a ponto de se tornar uma metodologia diferente de ensinar e aprender, distante da simples aplicação de conceitos ou conhecimentos previamente aprendidos que, na maioria das vezes, esse tipo de metodologia representou.

Segundo Lucchesi (1990, p. 78), o estudante já sabe efetuar as operações por que, em suas vivências anteriores, teve necessidade de tal aprendizado, cabendo ao professor ajudá-lo a compreender o que já sabe fazer e, isto vem de encontro com a aprendizagem significativa de Ausubel.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997, p.38) também reforçam este pensamento quando afirmam que é fundamental não subestimar a capacidade dos estudantes, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o conhecido e o novo.

Contudo, a partir da minha experiência profissional como professora nos nível de Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), Ensino Médio e Ensino Superior, verifiquei em nosso atual contexto escolar, que o conhecimento prévio do conhecimento matemático e a prática de resolução de problemas estão sendo insuficientes para a assimilação do novo conteúdo a ser ensinado, o que nos faz pensar que existe uma contradição no que os teóricos dizem a respeito da realidade em sala de aula.

Se os Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática), que são orientadores da prática de ensino dessa disciplina dão tanta ênfase à resolução de problemas; se estudos recentes já conhecidos também dão ênfase a esse tema, então, se propõe neste estudo apoiar-se sobre esta base esperando que os resultados encontrados deem subsídios para melhorar a prática de ensino nas aulas de matemática e, com isto, os estudantes possam ter o suporte e as ferramentas para melhorar o seu aprendizado.

De acordo com os PCN’s de Matemática (1997, p.44):

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar uma resposta aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela

> seja aceita e até seja convincente, mas não é uma garantia da apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário que se desenvolvam habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para alcançar a solução. Nessa forma de trabalho, ***o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução***. O fato de o estudante ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (grifo nosso).

Isto vem de encontro com a escolha da teoria da aprendizagem significativa já que Ausubel defende uma aprendizagem em que o estudante possa assimilar conteúdos potencialmente significativos e obter uma aprendizagem também significativa. Neste nosso estudo, a ênfase está em observar a avaliação qualitativa, por isso o grifo na frase acima.

Com base no que foi exposto acima, resta-nos o desafio da aplicação na sala de aula, com metodologias e estratégias que possibilitem os estudantes atenderem aos objetivos propostos no nosso sistema de ensino. Sabe-se que é necessário, antes de tudo estar motivado e acreditar que a mudança é possível, então, para isto se procurou maior esclarecimento sobre a teoria aqui apresentada para que se possa aplicá-la à metodologia de resolução de problemas.

Durante minha experiência profissional pude perceber através de relatos de colegas e estudantes que a maioria dos professores sente-se confuso na aplicação da metodologia e na escolha de problemas que possam representar que a estratégia está correta. Mesmo porque os livros didáticos não ajudam muito no uso dessa metodologia.

Dante (2009) menciona que os estudos e pesquisas das ultimas décadas em "Educação Matemática"[11] e as práticas educativas bem-sucedidas em sala de aula sugerem que os professores devem ter em mente sete princípios ao ensinar Matemática no ensino fundamental. Dentre eles, escolhemos o seguinte: "Aprender Matemática é aprender a resolver problemas, mas para isso é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas. Assim, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados com a total compreensão de todos os significados associados a eles".

---

[11] Área do conhecimento que estuda as múltiplas variáveis da aprendizagem e do ensino da Matemática.

Já Sternberg (2010, p. 383) diz que nos empenhamos na resolução de problemas quando precisamos suplantar obstáculos para responder a uma pergunta ou atingir uma meta. Se pudermos obter rapidamente uma resposta da memória, não temos um problema. Caso não tenhamos uma resposta imediata, então temos um problema para ser resolvido.

Portanto, preparar os estudantes para resolver problemas faz parte dos objetivos educacionais atuais, bem como dos objetivos gerais do ensino de Matemática (BRASIL, 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio (1997, 2000) reforçam a aplicação de Resolução de Problemas como um caminho para o ensino da Matemática que vem sendo discutido ao longo dos últimos anos, por isso, ao colocar o foco neste recurso, defende uma proposta resumida nos seguintes princípios:

> ◆ O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégias para resolvê-las.
>
> ◆ O problema certamente não é um exercício em que o estudante aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o estudante for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
>
> ◆ Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o estudante utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
>
> ◆ O estudante não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
>
> ◆ A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Além desses princípios, os Parâmetros Curriculares Nacionais direcionados para o ensino da Matemática relacionam algumas características[12] das situações que podem ser entendidas como problemas. Citaremos as mais relevantes para este estudo.

> Como primeira característica tem-se que **"um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado"**. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la.
>
> A segunda característica diz que "em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos estudantes não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução". Além disso, o que é um problema para um estudante, pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe (grifo nosso).

Percebe-se, então que o sistema de quatro ações da estratégia de situações problemas aplicado à sequência didática do conteúdo de limite está de acordo com as características acima expostas, já que é uma sequência de ações e operações utilizadas com o objetivo de se obter um resultado.

A Resolução de Problemas, ao longo da história, vem contribuindo para o desenvolvimento do ensino da Matemática, isto ficou bem claro conforme se avançou na pesquisa sobre este tema. Percebe-se que resolver problemas não modifica apenas a Matemática, mas também aquele que os resolve, isto é, o próprio homem (Dante, 2009).

Dante (2009, p. 30) se utiliza das etapas da resolução de um problema propostas por Polya e, classifica os problemas em seis tipos:

> 1º tipo - *Exercícios de reconhecimento* – tem como objetivo fazer com que o estudante reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc.
>
> 2º tipo – *Exercícios de algoritmos* – são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente, no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos. Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores.
>
> 3º tipo – *Problemas padrões ou típicos* – Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia. São os tradicionais problemas de final de capítulo nos livros didáticos. A solução já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é de transformar a linguagem usual em linguagem matemática,

[12] (BRASIL, 1997, pp. 44-)

> identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-los. O objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos necessários à sua solução. De um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do estudante nem o desafiam.
>
> 4º tipo – *Problemas-processo ou heurísticos* – São problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do estudante um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá leva-lo à solução. Por isso tornam-se mais interessantes do que os problemas-padrão. *Os problemas-processo* aguçam a curiosidade do estudante e permitem que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador. E, principalmente, iniciam o estudante no desenvolvimento de estratégia e procedimentos para resolver situações-problema, o que, em muitos casos, é mais importante que encontrar a resposta correta.
>
> 5º tipo – Problemas de aplicação – São aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. Também são chamados de situações-problema.

Desse modo, fica muitas vezes evidente que a abordagem da resolução de problemas matemáticos requer muito mais conhecimentos do que se pode reconhecer como pertencentes ao campo teórico no qual ele se insere (SADOVSKY, 2010, p. 35).

Já para Sánchez (2006, p. 76) resolver problemas não é apenas buscar uma solução concreta; consiste em facilitar o conhecimento das habilidades básicas, dos conceitos fundamentais e da relação entre ambos.

Na visão de Polya (2006, p. 147), para resolver um problema matemático deve-se partir de conceitos muito claros, que estão razoavelmente ordenados na mente, pois num problema matemático perfeitamente formulado, devem ser considerados todos os dados e todas as cláusulas da condicionante, não se esquecendo de fazer indagações sobre o problema e o processo, bem como avaliar as informações disponíveis.

Desse modo, Polya (2006) classifica como sendo quatro as etapas do processo de resolução de problemas:

> 1ª Etapa: A primeira coisa a fazer é compreender o problema;
> 2ª etapa: A concepção de um plano, de uma ideia da ação apropriada;
> 3ª etapa: Executar o plano na hora certa, quando ele estiver amadurecido e;
> 4ª etapa: Reexaminar a solução completa. Nesta etapa, a revisão da solução de um problema é a etapa mais importante, pois esta pode propiciar a verificação da argumentação e também fazer uma reflexão sobre o processo

> de resolução procurando descobrir a essência do problema e do método utilizado.

E, além disso, “se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas” é o que Polya (2006) afirma.

Esta frase tem uma importante implicação, os estudantes precisam exercitar a resolução de problemas e os professores têm um trabalho grandioso para apresentar aos alunos, pois é preciso selecionar e até mesmo criar situações problemas que atraiam a atenção dos estudantes para que eles se sintam motivados a essa prática tão relevante.

Contudo, para Mendoza (2009, p. 70) a resolução de problemas conforme foi proposta por Polya, não utiliza a formação da atividade de um determinado conteúdo com os respectivos elementos que caracterizam a ação. Tampouco, prepara-se a transformação da resolução do problema do material ao ideal. E, ainda, Talízina (1988, p. 202) critica os trabalhos de Polya, pois estes trabalhos supõem tacitamente que os alunos são capazes de realizar a atividade indispensável. Considera-se assim, que o pensamento, como certa função abstrata, já existe e que a tarefa consiste somente em fazê-lo trabalhar na direção necessária.

Este pensamento de Polya a respeito da resolução de problemas, e conforme já foi exposto com relação aos PCN’s de Matemática, não condiz com a realidade encontrada nas escolas com relação ao desempenho dos estudantes na resolução de problemas matemáticos. Por isso, esta pesquisa foi direcionada para observar a aplicação do sistema de quatro ações de situações problemas proposto por Mendoza (2009) concomitante com a teoria da aprendizagem significativa.

Mendoza (2009) assinala que qualquer situação que se situe a favor da aprendizagem da Matemática, deve estar concebida sobre a base de situações problema que gerem motivações e conhecimentos.

Embora no contexto escolar exista uma certa confusão sobre o significado do conceito de problema, que muitas vezes mascara sob este nome atividades que são meros exercícios, os problemas na matemática acabaram sendo um dos recursos didáticos mais utilizados, ou pelo menos, mais propagados para adquirir e consolidar os diferentes conhecimentos de conteúdos matemáticos (POZO, 2009, 24).

3.1 A Resolução de Problemas Segundo Ausubel

Segundo Ausubel (1980, p. 24) as condições da aprendizagem significativa também se aplicam aos métodos de resolução de problemas, mas, alerta que qualquer experimento sem a compreensão dos princípios metodológicos dos fundamentos envolvidos confere pouca qualificação de método científico.

Esclarecemos que o termo usado por Ausubel (1980) é “solução de problema” e, deve-se reconhecer que soluções de problemas e experimentos não são experiências genuinamente significativas, a menos que satisfaçam duas condições: i) Devem ser construídas sob uma base de princípios e conceitos claramente compreensíveis; e ii) as operações envolvidas devem ser significativas.

A solução significativa de problemas, em contraste com a aprendizagem por ensaio e erro, segundo Ausubel (1980) é uma aprendizagem pela descoberta orientada por hipóteses, exigindo a transformação e reintegração do conhecimento existente para se adaptar às demandas de uma relação meio e fim ou endereçada a um alvo específico. Mas, apenas este aspecto da solução de problema envolve a aprendizagem pela descoberta, pois a compreensão das condições do problema e a assimilação da solução do mesmo são formas de uma aprendizagem receptiva significativa.

Deste modo, Ausubel (1980) menciona as variáveis mais importantes que influenciam os resultados da solução de problemas:

> (1) A disponibilidade, na estrutura cognitiva, de conceitos e princípios que sejam relevantes para o problema particular a ser resolvido e;
>
> (2) Traços cognitivos e de personalidade, tais como: ser incisivo, ter capacidade de integração, estilo cognitivo, sensibilidade a problemas, flexibilidade, capacidade de improvisação, espírito de aventura, curiosidade intelectual e tolerância à frustração.

Segundo Ausubel (1980) a linguagem facilita a solução de problemas assim como facilita a aquisição de conceitos. Desta forma, a aptidão verbal e a prontidão cognitiva geral (inteligência, etapa do desenvolvimento nas dimensões subjetivo-objetivo e concreto-abstrato) ajudam a explicar tanto tendências etárias como diferenças individuais na habilidade para resolver problemas.

A solução de problemas refere-se a qualquer atividade em que tanto a representação cognitiva da experiência passada como os componentes de uma situação problemática atual são reorganizados para atingir um objetivo designado.

Tal atividade pode consistir de uma variação mais ou menos apoiada no ensaio e erro de alternativas disponíveis ou de uma tentativa deliberada de formular um princípio ou descobrir um sistema de relações subjacente à solução de um problema (discernimento).

Contudo, se o discernimento, ou a aprendizagem por ensaio e erro, é empregado na solução de um determinado problema é função tanto do tipo de problema envolvido como da idade, experiência prévia e inteligência do sujeito.

Segundo Ausubel (1980) em termos de abordagem, podem-se distinguir dois principais tipos de solução de problemas que ocorrem em todos os níveis etários:

> (1) A abordagem pelo ensaio e erro que consiste de uma variação, aproximação e correção de respostas aleatória ou sistemática até que uma variante bem sucedida emerja.
> (2) *A abordagem do discernimento* que, por outro lado, implica numa "disposição" que está orientada para a descoberta de uma relação significativa de meios e fim subjacentes à solução do problema. Pode envolver ou uma simples transposição de um princípio previamente aprendido a uma situação nova análoga, ou uma reestruturação e integração, mais fundamental, da experiência passada e presente para se adaptar às exigências de um alvo predeterminado. Caracteristicamente, as soluções por discernimento *parecem* emergir súbita ou descontinuamente. São também invariavelmente acompanhadas por alguma compreensão implícita do princípio que fundamenta a solução do problema – mesmo se ele não puder ser verbalizado com êxito.

Esta compreensão é demonstrada funcionalmente tanto pelo fato de ser imediatamente reproduzível em exposições subsequentes ao mesmo problema e também por ser transferível a problemas relacionados. Portanto, não somente a solução por discernimento é frequentemente um reflexo da transferência ou da aplicação de princípios estabelecidos relevantes a novas variantes do mesmo problema, mas a possibilidade de transferência em si seja talvez o critério mais importante do discernimento.

Ausubel nos alerta que muito do que parece ser uma solução de problemas significativa é simplesmente uma espécie de aprendizagem pela descoberta rotineira que envolve a solução de problema-tipo usado na maioria das salas de aula de matemática ou de ciências. E, apesar dele mencionar que a solução de problemas-tipo envolve pouco mais do que a memorização de rotina e a aplicação de fórmulas, e manipulação rotineira de símbolos, o que não configura a aprendizagem significativa, a nossa proposta com a estratégia do sistema de quatro ações da atividade de situações problema em limite é exatamente para suprir esta deficiência e tornar assim esta prática significativa.

Aqui vamos nos focar sobre as considerações de Ausubel (1980) que cita dois fatores que influenciam a solução de problema tais como: fatores de tarefa e fatores intrapessoais.

a) *Fatores de tarefa*: A heterogeneidade dos exemplos presumivelmente desencoraja a perseveração cega, força o sujeito a permanecer alerta e a prestar atenção, e aumenta a generalidade e, portanto, também a possibilidade de transferência de uma solução. Contudo, os efeitos de transferência da heterogeneidade são negativos, a não ser que seja alcançada a mestria dentro de cada tipo de problema (AUSUBEL, p. 483).

Para Ausubel (1980, p. 483) o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, obviamente requer uma longa experiência em lidar com problemas e, parte dessa experiência deveria ser autônoma e não orientada. Contudo, existem boas razões para se acreditar que tanto a orientação sob a forma de pistas facilita a solução de problema como é pedagogicamente eficaz para desenvolver habilidades de resolver problemas.

Todos os métodos destinados a melhorar a capacidade de resolver problemas dos estudantes ou se apoiam em certas pistas gerais sobre técnicas eficazes de resolver problemas ou oferecem uma retroalimentação crítica sobre as estratégias empregadas (AUSUBEL, p. 483).

b) *Fatores intrapessoais:* A inteligência é um dos mais importantes determinantes da capacidade de resolver problemas. Por um lado, o poder de raciocinar é um componente proeminente em todos os testes de inteligência. Por outro lado, muitas outras aptidões intelectuais medidas pelo teste de inteligência (compreensão, memória, processamento de informações, aptidão para analisar) afetam a solução de problemas.

A posse de um fundo de conhecimentos relevantes é um determinante importante da capacidade de solução de problemas. A habilidade heurística não é substituta para o conhecimento substantivo na maioria das tarefas de solução de problemas acadêmicos e da vida diária. Contudo, a compreensão dos princípios e conceitos relevantes, embora necessários para a solução de problemas, não é uma condição suficiente, pois muitas outras variáveis cognitivas e de personalidade estão implicadas (MAYER, 1957, apud AUSUBEL, 1980, p. 484).

Ausubel (1980, p. 484) enfatiza que embora o êxito na solução de problemas indique sem ambiguidade que a compreensão está presente, o fracasso não prova que a compreensão está ausente.

Ausubel (1980, p. 484) também considera que outros traços cognitivos, tais como: ter uma mente aberta, flexibilidade, capacidade para gerar hipóteses múltiplas e novas, atenção, ser incisivo, sensibilidade para os problemas, curiosidade intelectual e capacidade para integrar as ideias, influenciam a solução de problemas de maneira bastante evidente. Além desses traços cognitivos, o estilo cognitivo é também um fator relevante, especialmente com respeito às estratégias gerais de solução de problemas.

Outro comentário relevante de Ausubel (1980) é que embora possam faltar evidências, parece razoável supor que a capacidade de solucionar problemas não é um traço altamente generalizado dentro de um dado indivíduo. Varia com o interesse, experiência e aptidão nas diferentes áreas do empreendimento humano.

Desse modo, é necessário o ensino do pensamento crítico que pode ser realizado dentro de um contexto de uma forma ativa de aprendizagem receptiva suplementada tanto pela descoberta orientada quanto por experiências de solução de problemas mais autônomas (AUSUBEL, 1980, P. 486).

Assim, uma definição precisa dos termos é enfatizada, bem como um delineamento explícito das semelhanças e diferenças entre os conceitos relacionados e, também é fomentada uma atitude de questionamento, assim como é encorajada a reconciliação integradora de ideias reformuladas numa linguagem idiossincrática.

Para resumir Ausubel (1980) lista as principais fontes de variância na capacidade de resolver problemas que são:

1. Conhecimento do assunto e familiaridade com a lógica especial da disciplina.
2. Determinantes cognitivos como sensibilidade a problemas, originalidade e curiosidade intelectual; estilo cognitivo, conhecimento geral acerca de modos eficazes de resolver problema; mestria de estratégias especiais de solução de problemas em disciplinas particulares; e
3. Traços de personalidade como impulsos, persistência, flexibilidade e ansiedade.

No caso de determinantes como sensibilidade a problemas, originalidade, estilo cognitivo e fatores da personalidade, a maior parte da variância provavelmente é função do potencial genético e da experiência passada cumulativa. Admite-se assim, que estes aspectos da capacidade para resolver problemas não são muito treináveis. Portanto, para Ausubel (1980, p. 486) a abordagem mais promissora do treinamento na solução de problemas focaliza o conhecimento do assunto, a lógica e a estratégia da solução de problemas numa disciplina especial, e os princípios gerais da solução eficaz de problemas.

Conforme o que já foi exposto fica claro que a realidade que encontramos nas escolas fica num meio termo, nem a aprendizagem por descoberta de resolução de problemas é aplicada totalmente e nem se deseja apenas uma aplicação que envolve a memorização e rotina, com a simples manipulação de símbolos e fórmulas como ocorre numa abordagem tradicional. Desse modo, nosso estudo se baseou na proposta de uma sequência didática que aplicou um sistema de quatro ações como estratégia de situações problemas, a fim de promover uma aprendizagem significativa.

3.2 O Sistema de Quatro Ações da Estratégia de Situações Problema em Matemática (ESPM)

A partir de ideias já existentes no método de resolução de problemas Mendoza (2009), propôs um sistema invariante de quatro ações com suas operações, como estratégia de resolução de situações problemas da matemática (ESPM). Esta estratégia tem como objetivo desenvolver a capacidade cognitiva dos estudantes em resolver problemas. Em cada uma das quatro ações, na sequência em que se apresentam, existe um conjunto de operações que conduzem o estudante a alcançar o objetivo essencial de cada ação. Os princípios implícitos em cada ação norteiam o estudante a ter mais atenção, a extrair os dados existentes, pesquisar sobre os elementos desconhecidos, criar hipóteses, realizar esboços, até que possa responder ao objetivo do problema.

Apresentamos no Quadro 5 o conjunto das operações descritivas das quatro ações denominado de “Sistema de Quatro Ações da Estratégia de Situações Problema Matemáticos (ESPM)”, segundo Mendoza (2009). Enfatizamos que é através deste sistema de quatro ações que vamos nos orientar para realizar as análises dos problemas resolvidos pelos estudantes, visto que o professor tem o papel de direcionar e orientar a aplicação dessa estratégia de ensino cujas ações reportam ao “que fazer?” e as operações indicam “como fazer?”.

Quadro 5 - Sistema de Quatro Ações da Estratégia de Situações Problemas Matemáticos (ESPM)

Sistema de Quatro Ações da Estratégia de Situações Problemas Matemáticos (ESPM)

Primeira Ação: Compreender o Problema

a) Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos;
b) Estudar e compreender os elementos desconhecidos;
c) Determinar os dados e condições;
d) Determinar os objetivos do problema.

Segunda Ação: Construir o Modelo Matemático

a) Determinar as variáveis e incógnitas;
b) Nomear as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas;
c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições;
d) Analisar as unidades de medidas do modelo matemático.

Terceira ação: Solucionar o Modelo Matemático

a) Selecionar o método matemático para solucionar o modelo;
b) Identificar as unidades de medida do modelo matemático;
c) Selecionar um sistema de computação algébrica que contenha os recursos necessários do método matemático para solucionar o modelo (quando for necessário);
d) Solucionar o modelo matemático.

Quarta Ação: Interpretar a solução

a) Interpretar o resultado obtido da solução do modelo matemático;
b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com os objetivos do problema;
c) Dar resposta aos objetivos do problema;
d) Realizar um relatório baseado nos objetivos do problema;
e) Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta com os objetivos do problema a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução.

Fonte: Mendoza (2009).

Não devemos pensar nestas etapas como algo rígido, linear e fixo, ou mesmo infalível, pois o processo de resolução de problemas é algo bem mais complexo e rico. Desse modo, podem surgir outras operações para cada ação à medida que se trabalhe com novas situações problemas. Estas ações devem servir de orientação durante o processo para encontrar a solução do problema.

Dependendo do tipo de problema e do objetivo em aplicá-lo, o professor definirá um critério essencial de cada uma das quatro ações, ao qual o estudante deverá atender para compor a solução do problema dado. Entretanto, a escolha do critério essencial não se restringe a apenas um em cada ação, isto depende do problema em si como do objetivo definido pelo professor.

Primeira ação: *Compreender o Problema*. Nesta ação o estudante deverá ser capaz de demonstrar que compreendeu o enunciado do problema e, que sabe interpretar a linguagem matemática. Ou seja, se ele não conhece o conteúdo matemático ele não será capaz de resolver o problema, mas poderá acontecer do estudante lembrar-se de algum problema semelhante e, então poderá resolvê-lo através de associação ou mesmo por tentativa e erro.

Segunda Ação: *Construir o Modelo Matemático*. Nesta fase o estudante avança um pouco mais em direção à solução. Muitas vezes o estudante não consegue elaborar o modelo matemático e parte logo para solucionar o problema. Entretanto, o estudante deverá demonstrar que é capaz de construir um modelo matemático usando fórmulas, desenhos e/ou gráficos. Para isso ele deverá conhecer a linguagem matemática do conteúdo aplicado e os conceitos relacionados ao problema. O estudante também deverá demonstrar o conhecimento das unidades de medidas e relacioná-las de acordo com o que é solicitado no problema.

Terceira Ação: *Solucionar o modelo matemático*. A partir do modelo matemático esboçado, segue-se para solucionar o modelo. Aqui ele é solicitado a desenvolver a solução passo a passo, pois os detalhes percebidos na construção do modelo matemático o ajudarão a encontrar a solução correta. Poderá ser necessário selecionar um Sistema de Computação Algébrica (SCA) que contenha recursos que ajudem na solução do problema pelo fato do processamento rápido de informações, que de outro modo, demandaria muito tempo e trabalho para o estudante.

Quarta Ação: *Interpretar a Solução*. Para finalizar, o estudante deverá demonstrar desenvoltura na forma escrita de interpretar a solução do problema descrevendo e justificando o que fez para resolver o problema. Aqui ele demonstrará seu conhecimento do conteúdo usando linguagem matemática apropriada, condizente com sua compreensão do problema e com a solução encontrada.

Esta estratégia de situações problema tem como objeto de estudo os problemas matemáticos do conteúdo de limite, e por objetivo, prover os estudantes de um modo eficaz para melhorar o desempenho na resolução de problemas.

Portanto, neste estudo faremos a análise dos problemas resolvidos pelos estudantes a partir deste sistema de quatro ações (ESPM) aplicado como estratégia de ensino para desenvolver a habilidade de resolução de problemas matemáticos no conteúdo de limite de uma função de variável real.

3.3 A Direção do Processo de Estudo

A essência deste estudo baseia-se no processo do ensino da Matemática, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, refletindo na aprendizagem conceitual de limite. Assim, vamos aqui transcorrer sobre a direção do ensino, pois até o presente momento nossa exposição deu-se principalmente sobre o ensino e aprendizagem a partir da teoria aplicada e da metodologia de resolução de problemas.

Para D'Amore (2007, p. 222) enfrentar as questões do ensino e da aprendizagem, em termos de didática. Significa que a transmissão do conhecimento é um fenômeno complexo, que precisa de numerosas medições, e que é necessário manter sempre juntos os três polos, do professor, do saber e do estudante, mas sem reduzir a análise a apenas um dos três.

A partir deste ponto estaremos expondo sobre a direção do ensino programado com base nos conhecimentos de Nina Talízina (1988).

A direção, do ponto de vista da cibernética[13], é uma influência sobre o objeto (processo) que se escolhe no meio de uma multidão de influências possíveis, tendo em conta o objetivo proposto, o estado do objeto (processo), suas características conduzindo ao melhoramento do funcionamento ou do desenvolvimento do objeto dado, isto é, a aproximação do objetivo (TALÍZINA , 1988).

Segundo Talízina (1988, p. 46) todos os tipos de direção podem ser divididos em direção isolada e cíclica. O primeiro tipo não tem a regulação das etapas do processo dirigido por parte do sistema de direção. O segundo tipo é o mais usado pela cibernética, trata-se de um modo mais eficaz de direção.

Para a sequência didática de limite foi escolhida a direção cíclica, pois esta pode ser realizada segundo o princípio chamado de "caixa branca" (transparente) em que o enlace do retorno proporciona as informações sobre o processo de obtenção do produto final.

Talízina (1988) recomenda que para um melhor ensino é recomendada a aplicação da direção cíclica que se realiza segundo o princípio da "caixa branca (transparente)". Mas, para isto é necessário o cumprimento de algumas exigências:

1) indicar o objetivo da direção;

---

[13] Ciência que estuda as comunicações e os sistemas de controle que funcionam automaticamente nos organismos vivos e também nas máquinas (Mini-Aurélio, 2001, p. 161)

> 2) estabelecer o estado de partida do processo dirigido;
>
> 3) determinar o programa de influências que preveja os principais estados transitórios do processo;
>
> 4) assegurar a recepção da informação segundo um determinado sistema de parâmetros sobre o estado do processo dirigido, ou seja, assegurar-se do enlace do retorno sistemático;
>
> 5) garantir o tratamento da informação obtida pelo canal do enlace de retorno, a elaboração das influências corretivas (reguladoras) e sua realização.

Estas exigências pressupõem a elaboração de dois tipos de programas de direção do ensino: os principais e os corretivos (reguladores). O programa principal da direção (ensino) é preparado antes de começar o funcionamento do sistema de direção (ensino). Durante sua elaboração leva-se em conta o estado de partida do processo dirigido e seus estados transitórios qualitativamente originais (no caso do ensino, as principais etapas do processo de assimilação). O programa de regulação (correção) é elaborado durante o processo de direção (ensino) com base na análise dos dados obtidos pelo canal de enlace do retorno.

A seguir apresentamos as principais exigências aplicadas ao processo de ensino com o objetivo de serem usadas na sequência didática do conteúdo de limite.

(D1) O objetivo da direção (ensino)

O objetivo da direção do ensino reside na mudança do estado do processo dirigido para o estado planejado, que pode ser resultado da aplicação de uma teoria da aprendizagem. Durante o ensino, neste caso, são introduzidas mudanças determinadas na atividade cognitiva dos estudantes.

(D2) Estado de partida da atividade psíquica dos estudantes

Da mesma forma que os objetivos do ensino, a análise do estado de partida da atividade psíquica dos estudantes, será realizada em dois níveis: (1) estabelecendo a correspondência do desenvolvimento psíquico do estudante com os objetivos propostos na etapa dada do ensino ou no estudo da disciplina dada; (2) estabelecendo a existência dos conhecimentos concretos e das ações cognitivas necessárias par a formação do tipo dado da atividade cognitiva.

É natural que no início seja realizado o diagnóstico sobre o nível geral de desenvolvimento dos estudantes e se estabeleça seu nível de preparação para o estudo na etapa dada ou para o estudo da disciplina dada. Ao se verificar a existência dos conhecimentos e hábitos necessários prévios poderão ser encontrados dois casos: a) todos os conhecimento e hábitos necessários estão presentes; b) partes dos conhecimentos e dos hábitos prévios não estão formados ou estão formados com indícios insuficientes para a assimilação de novos conhecimentos e hábitos. No primeiro caso, no programa de ensino se prevê a formação somente de novos conhecimentos e hábitos determinados pelo objetivo do ensino; no segundo caso, inicialmente se formam ligações que faltam do sistema de conhecimento e hábitos prévios, e depois, os previstos pelo objetivo do ensino. Esta análise do estado de partida da atividade psíquica poderá ser realizada também para esclarecer as peculiaridades individuais dos estudantes, cujos dados poderão ser utilizados em programas de ensino e avaliações.

(D3) Os principais estados do processo de assimilação

O programa de direção do processo de estudo deve assegurar, por conseguinte, o movimento dos tipos, em formação da atividade psíquica através das principais etapas qualitativas deste processo. Para indicar o conteúdo concreto destas etapas e sua sucessão recorre-se às regularidades específicas do processo dirigido, no nosso caso, a teoria da aprendizagem aplicada, ou seja, da aprendizagem significativa. Desse modo, as peculiaridades das etapas do processo de assimilação determinam tanto o programa fundamental do ensino como em grau considerável, o programa de regulação.

Para Mendoza (2009) o professor tem a função de ser uma fonte de informação e dirigir esse processo de assimilação.

(D4) Enlace do retorno no ensino.

É essencial que no enlace do retorno (feedback), o movimento do processo dirigido no presente, atue em seu desenvolvimento no futuro. Com isto se inclui no conteúdo do enlace de retorno tanto a etapa da obtenção da informação sobre o estado do objeto dirigido (ensino) pelo dirigente (professor) como a ação reguladora deste último. Esta é uma interpretação de alguns pesquisadores[14] conforme Talízina (1988 p. 52).

[14] S. Beer, 1963; P. Koss, 1958 e outros.

Deve-se considerar que durante a direção do ensino nem sempre se necessita da correção: se o processo dirigido se desenvolve em correspondência com os objetivos propostos, o professor não exerce nele nenhuma influência complementar. Consequentemente, não haverá a segunda etapa da direção, mas sim a obtenção das informações sobre os passos do processo dirigido. O que não é o caso em se tratando do processo ensino-aprendizagem.

A correção do processo de assimilação que é realizada como resultado da utilização destas informações é considerada como uma das etapas independentes da direção.

A realização do enlace de retorno[15] aplicada ao processo de estudo pressupõe a solução de problemas. Em primeiro lugar, a determinação do conteúdo do enlace de retorno: a separação do conjunto das características controladas tendo-se em conta, por um lado, os objetivos do ensino e por outro, a teoria psicológica do ensino que se toma como base (neste caso a aprendizagem significativa). A regra geral consiste em controlar as principais características independentes do processo, resultando na mudança conjunta de um estado qualitativo a outro.

No processo de estudo, o controle cumpre-se, não só a função de enlace de retorno, mas, igualmente, a função de reforçamento e, por isso está relacionado com a esfera motivacional do estudante (TALÍZINA, 1988, p. 53).

(D5) Regulação (correção) do processo de ensino

As informações sobre o processo de ensino recebidas através do enlace de retorno (feedback) permitem introduzir as correções necessárias. A correção é feita como regra geral, por reação aos erros dos estudantes. No programa são introduzidas mudanças, levando-se em conta o caráter dos erros, para poder eliminá-los. Neste caso, se dá preferência a este tipo de correção porque o enlace de retorno é realizado tendo-se apenas um parâmetro: o cumprimento correto da tarefa pelos estudantes. Para sua utilização é necessário controlar o conteúdo e o sistema principal das características da atividade cognitiva que conduz a uma ou outra resposta. Além disso, é necessário conhecer a lógica do desenvolvimento

---

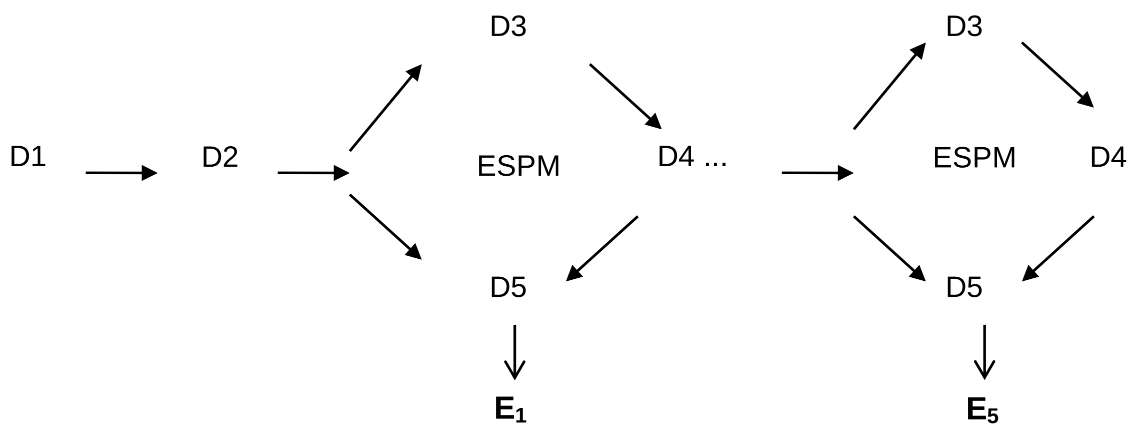
[15] Segundo Talízina (1988, p. 52) o conceito de enlace de retorno está relacionado com o surgimento da cibernética, contudo, a necessidade do enlace do retorno na conduta dos animais e na atividade do homem já era do conhecimento de filósofos e psicólogos.

destas características: os principais estados transitórios de sua formação. Cabe assinalar que durante a prática do ensino, a correção do programa pode ser realizada não só com a existência ou previsão de erros, mas igualmente com sua ausência e inclusive, com a ausência de sinais de sua possível aparição.

O conteúdo concreto das influências reguladoras é determinado primeiro pelo caráter das informações recebidas através do enlace de retorno e, em segundo, pela lógica interna do processo de estudo. Na pedagogia e na psicologia existem diferentes representações sobre a lógica do processo de estudo, a solução desta questão depende da teoria que se toma como base. Assim, a lógica do estudo aplicada à direção do ensino terá como base a *teoria da aprendizagem significativa.*

A direção usada na aplicação prática em sala de aula foi a direção cíclica (transparente), pois se leva em consideração as informações sobre o processo e o retorno, ou seja, são considerados todos os elementos na transformação até chegar ao produto final, conforme Esquema 1 a seguir:

Esquema 1 – Modelo do Processo de Direção de Ensino



Legenda: (D1) Objetivo de ensino; (D2) Nível de partida (Conhecimento prévio); (D3) Processo de assimilação (de Ausubel); (D4) Retroalimentação e (D5) Correção.

ESPM – Atividade de Situações Problema em Matemática.

E_1 e E_5 : Etapas da Assimilação da aprendizagem Superordenada.

Segundo Talízina (1988), sendo o objetivo de ensino o aspecto hierárquico, deve definir-se a atividade em função do mesmo, isto é, selecionar um sistema invariante de ações, com suas respectivas operações. Podendo consistir na formação de uma nova atividade ou elevação da qualidade da atividade existente segundo algumas características.

Portanto, para a construção do sistema de quatro ações nas situações de problemas matemáticos devem-se realizar os seguintes atos: definir o objetivo de ensino da atividade de estudo, determinar o nível de partida (o conhecimento prévio) da atividade cognitiva, fazer o planejamento, selecionar as tarefas do processo de assimilação e os instrumentos de controle, executar a retroalimentação e correção.

Um elemento muito importante no processo de ensino e aprendizagem é o nível de partida dos estudantes (conhecimento prévio) em relação à estrutura cognitiva que se deseja formar e que está constituída por um sistema de conceitos. Não se pode prever um resultado satisfatório na aprendizagem sem levar em conta este elemento.

Um bom planejamento para a realização da aula ministrada pelo professor deve assegurar um resultado satisfatório, assim como a seleção racional pelo menos de um método de solução. Para atender nosso objetivo de alcançar uma aprendizagem eficaz ela deve ser preparada conforme a teoria da aprendizagem receptiva significativa.

Com frequência os professores ao orientar as ações direcionam a solução de casos particulares e os estudantes obtêm as ações preparadas pelo professor, sendo pouco efetivo na transferência dos conhecimentos para novas situações. Isto pode ser agravada em ocasiões quando as orientações não são completas (TINTORER; MENDOZA; CASTAÑEDA, 2009; MENDOZA; TINTORER, 2010).

Começa-se a observar que os professores e pesquisadores preocupados com a educação brasileira estão se movimentando para mudar o modelo tradicional, que estão se adaptando à exigência da realidade nas escolas. Os livros textos já estão bastante contextualizados, atendendo às questões da interdisciplinaridade abordadas nos Parâmetros Curriculares, mas também se observa um desenvolvimento muito lento dos alunos, em algumas regiões brasileira, no sentido de atender à expectativa de sua aprendizagem.

Contudo, o que desejamos a partir desta intervenção feita pela professora da disciplina de Cálculo 1, poiada a uma teoria da aprendizagem (da aprendizagem significativa de Ausubel) e a uma metodologia de resolução de problemas (o sistema de quatro ações), tanto no papel condizente à professora, de orientação com o olhar no desenvolvimento cognitivo do estudante, despertando uma independência intelectual em cada estudante, bem como no papel do próprio estudante estimulando sua participação nas atividades e seu interesse em assimilar o conhecimento.

Assim, após a elaboração do plano de ensino e dos planos de aulas, foi apresentado aos estudantes, a cada aula, o conjunto de tarefas da sequência didática do conteúdo de limite, enfatizando sempre o objetivo de cada aula expositiva e tarefa. Tudo isso permite iniciar e conduzir de forma plena o processo de ensino aprendizagem de acordo com o nosso objetivo para esta pesquisa.

A partir dos instrumentos de controle: os pós-testes e observação direta e participante da professora, são coletadas as informações do retorno sistemático (retroalimentação) através de indicadores como: se o estudante realiza a ação programada e, se a realiza de acordo com os objetivos estipulados, para que se possa reelaborar os exemplos e situações problemas, para melhor atender aos pressupostos da aprendizagem significativa.

A correção do processo deve ser realizada, considerando a retroalimentação ou feedback, e pela lógica interna do processo de assimilação. Não deve ser realizada considerando somente o descumprimento dos elementos relevantes do processo de ensino, senão as causas que a suscitaram como: deficiência dos conhecimentos prévios na estrutura cognitiva dos estudantes, ou na etapa anterior do processo de assimilação ou causas eventuais. Também, se necessário, dar atendimento de reforço ou passar o estudante para uma etapa posterior antes do previsto, assim como avaliar o próprio programa de ensino.

A originalidade do ensino como sistema de direção consiste, antes de tudo, em que o objeto dirigido – o processo de estudo e assimilação – é realizado sempre por um indivíduo concreto. A complexidade e a grande variedade de fatores pessoais são tão significativas, que no melhor dos casos, pode adaptar-se somente a um determinado grupo de estudantes (TALÍZINA, 1988).

3.4 O Estudo de Cálculo Diferencial e Integral I

Segundo D’Amore (2007) A Educação matemática é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática.

Neste tópico aborda-se a elaboração de uma estratégia didática para aplicação no estudo de limites de uma função, usando como estratégia de resolução de problemas o sistema de quatro ações da estratégia de situações problemas, em limite.

O principal livro texto usado como referência bibliográfica para o estudo do Cálculo, adotado pela professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, foi o livro “Cálculo” de James Stewart, 5ª edição (2006), a versão mais recente de 2011, foi usada para complementação, pois na biblioteca do Instituto (IFRR) só havia exemplares da 5ª edição.

Para Stewart (2006) a ênfase do estudo do Cálculo está na compreensão dos conceitos como meta principal no ensino do cálculo. Esta citação, verificada na abordagem do livro, determinou sua escolha, dentre os outros autores conhecidos.

Segundo Stewart (2006) o atual movimento de reforma do Cálculo, originado na Conferencia de Tulane, de 1986, formulou uma recomendação fundamental: “focalizar na compreensão conceitual”, o que atende perfeitamente ao nosso modelo de estudo com base na ASP e na aprendizagem significativa.

Desde a sua descoberta, o Cálculo, se tornou fundamental nas diversas áreas do conhecimento humano e nas ciências exatas, além disso, o Cálculo é menos estático e mais dinâmico, diferencia-se assim da matemática que conhecemos até o ensino médio. Trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, exige do estudante a obtenção de uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais aprofundado (Stewart, 2006), o que configura que é necessário que o professor tenha informações sobre os conhecimentos prévios que os estudantes possuem.

3.4 O Estudo do Conceito de Limite de uma Função Real de uma Variável Real

Para Stewart (2006) o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte das demais áreas da matemática.

No estudo de limite, uma das metas é treinar os estudantes a pensar logicamente. Aprender a escrever a solução dos problemas de uma forma conexa, passo a passo e com sentenças explicativas. Stewart define o cálculo como o ramo da matemática que trata de limites cujo objeto fundamental é o estudo das funções (STEWART, 2006).

Considerando a importância do estudo das funções para o cálculo, este foi o tema do organizador prévio, um estudo sobre as ideias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los. Enfatizando que uma função pode ser representada de várias maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou mesmo, por meio de palavras. Portanto, aos estudantes cabe observar os principais tipos de funções que ocorrem no Cálculo e descrever como usá-las como modelos matemáticos de fenômenos do mundo real.

O século XIX foi uma época de muito rigor na matemática, mas segundo Boyer (2003) merece ser considerada a Idade de Ouro da Matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto – de fornecer definições cuidadosas e demonstrações rigorosas. A frente desse movimento estava o matemático francês Augustin-Louis Cauchy[16]. Cauchy pegou a ideia de Limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d´Alambert (1717-1783) e tornou-a mais precisa (Stewart, 2011, p.102).

Segundo Boyer (2003, p. 355) Cauchy deu ao cálculo elementar o caráter que tem hoje. Rejeitando o procedimento de Lagrange, através do teorema de Taylor, tornou fundamental o conceito de limite de d'Alembert, mas deu-lhe um caráter aritmético mais preciso. Dispensando a geometria e infinitésimos ou velocidades, deu uma definição de limite relativamente clara:

"*Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros" (Boyer, 2003).*

Continuando, onde muitos outros matematicos anteriores tinham pensado num infinitésimo como um número fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma variável dependente:

---

[16] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) Matemático francês trabalhou como engenheiro até 1813, antes de se tornar professor de matemática em Paris. O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na análise matemática. Cauchi fez também várias contribuições relevantes ao Cálculo, tanto para variáveis reais quanto para as complexas (Boyer, 2003, p. 355).

"*Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidametne de modo a convergir ao limite zero"* (Boyer, 2003, p. 355).

Segundo Stewart (2011) quando Cauchy usava definições e demonstrações em exemplos, frequentemente empregava as desigualdades delta-épsilon. Uma demonstração típica de Cauchy começa com: "Designando por δ e ε dois números muito pequenos...". Ele usou *épsilon* em virtude de uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa *erreur*, e *delta*, por corresponder a *différence*.

O Limite de uma função é um conceito fundamental em Cálculo. Assim sendo, a função tem um limite *L* em uma variável independente *p* se *f(x)* é "próximo" a *L* sempre que *x* é "próximo" a *p*. Em outras palavras, *f(x)* torna-se mais e mais próxima a *L* à medida que *x* se move mais e mais próximo a *p*.

A aplicação conceitual de Cauchy está implícita mais especificamente, quando *f* é aplicado a cada variável independente *suficientemente* próximo a *p*, o resultado é um valor da variável dependente que é *arbitrariamente* próximo a *L*. Se as variáveis independentes "próximas" a *p* são tomadas a valores que sejam muito diferentes, é dito que o limite *não existe*. Entretanto, o limite não existe apenas para funções de uma variável.

3.4.1. Sequência didática em Limite

O conceito de limite foi aplicadas de acordo com o sistema de quatro ações da estratégia de situações problema em limite (ESPL) concomitante com a aprendizagem receptiva significativa. As atividades foram planejadas e elaboradas pela professora da disciplina.

Segue uma descrição de toda a sequência didática planejada e elaborada pela professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do IFRR:

a) Definição dos objetivos de ensino;
b) Determinação dos conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes;
c) Preparação do material de ensino a partir dos conceitos particulares para formular o conceito geral atendendo o princípio da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora;

d) Seleção dos problemas atendendo à ideia da estratégia de situações problema e da teoria da aprendizagem significativa;

e) Apresentação das atividades na forma de situações problemas;

f) Retroalimentação;

g) Correção das atividades feitas pelos estudantes;

O estudo do sistema de quatro ações da estratégia de situações problema em Limite (ESPL) foi realizado de acordo com a teoria da assimilação, a direção de ensino e da aprendizagem receptiva significativa de Ausubel.

Neste estudo foram realizadas abordagens do conteúdo de limite, componente curricular da disciplina de Cálculo I. Entretanto, são enfatizados apenas os elementos relevantes de Limite e as situações problemas escolhidas para o desenvolvimento da ideia intuitiva de limite através do comportamento de funções; limite de uma função; limites laterais; as propriedades dos limites; continuidade e limites infinitos.

A explanação será realizada a partir dos conceitos particulares de Limite para formular o conceito geral. Nas primeiras aulas os estudantes poderão perceber como surgem os limites quando se tenta encontrar a tangente a uma curva ou velocidade de um objeto.

A ideia de limite de uma função é dada através de uma exposição passo a passo, motivadora, que inclui desde a discussão do cálculo do valor de uma função na proximidade de um número através de um tratamento intuitivo do processo de limite, até uma definição rigorosa envolvendo épsilons e deltas ($\varepsilon - \delta$). Na sequência serão introduzidos os teoremas de limite para simplificar o cálculo de limites de funções elementares (não será dada a conotação de teoremas, mas de propriedades). Posteriormente, o conceito de limite é ampliado para incluir outros tipos de funções, limites envolvendo o infinito e, são usados para definir as assíntotas vertical e horizontal de gráficos de funções e, por fim, as funções contínuas que segundo Leithold (1994, p. 56) provavelmente é a classe mais importante de funções estudadas em Cálculo.

A meta do ensino de limite é treinar o estudante a pensar logicamente para aprender a escrever a solução dos exercícios sobre limite de uma forma conexa, passo a passo com sentenças explicativas – e não apenas através de uma fileira de equações ou fórmulas desconexas.

Desde a primeira aula enfatizou-se as representações múltiplas de funções: verbal, numérica e algébrica. Uma discussão de modelos matemáticos leva a revisão das funções padrão, incluindo a função exponencial e logarítmica (organizadores prévios). O material sobre limites está motivado por uma discussão a partir dos problemas da tangente e da velocidade.

A professora apresentou primeiramente dois problemas, o da tangente e da velocidade, para que os estudantes tivessem contato com a ideia intuitiva do conceito de limite atendendo ao principio da diferenciação progressiva e à ideia superordenada, até que o estudante possa compreender e aplicar o conceito geral de limite.

O "problema da tangente" marca o início do estudo de Limite com o objetivo de introduzir o conceito da ideia intuitiva de limite, visando auxiliar a compreensão dos estudantes, para que os mesmos possam perceber e concluir que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes.

O problema da tangente é um problema clássico trazido na maioria dos livros de Cálculo. A palavra *tangente* que vem do latim *Tangens* significa "tocando". Assim uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Ou seja, uma reta tangente deve ter a mesma direção e sentido que a curva no ponto de contato. Mas, como tornar precisa esta ideia?

Para um círculo poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez conforme a figura 1a. Já para as curvas mais complicadas esta definição é inadequada.

A figura 1b mostra duas retas, m e t, passando por um ponto P sobre uma curva C. A reta m intercepta C somente uma vez, mas certamente não aparenta o que pensamos ser uma reta tangente.

A reta t, por outro lado, aparenta ser uma tangente, mais intercepta C duas vezes, conforme Figura 1b.

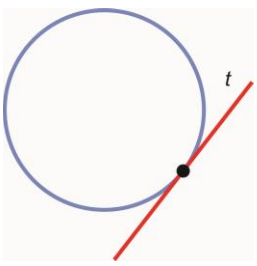


Figura 1a

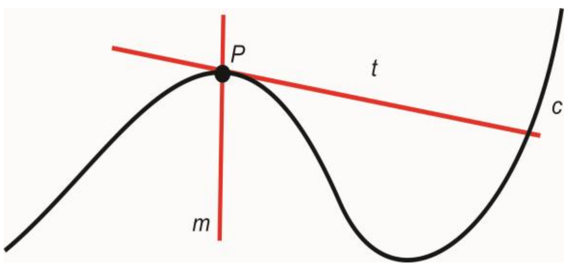


Figura 1b

<u>Exemplo 1</u>: encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P(1,1).

Solução: Encontrando a inclinação *m* pode-se achar uma equação da reta tangente *t*. Contudo, há somente um ponto P, sobre t, e isto é uma dificuldade, pois para calcular a inclinação são necessários dois pontos. Então, pode-se calcular uma aproximação de *m* escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola e computando a inclinação m_{PQ}, da reta secante *PQ*.

Vamos escolher $x \neq 1$ de forma que $P \neq Q$. então,

$$M_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

Por exemplo, para o ponto Q (1,5; 2,25) temos:

$$M_{PQ} = \frac{2{,}25-1}{1{,}5-1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

A tabela 3 mostra os valores de m_{PQ} para valores de x próximos de 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, ficando evidente que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente *t* deva ser m = 2.

x	m_{PQ}	x	m_{PQ}
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Tabela 3 – do exemplo 1

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta para escrever a equação da tangente no ponto (1,1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1$$

A figura 2 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que **Q** tende a **P** ao longo da parábola as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.

Q tende a P pela direita

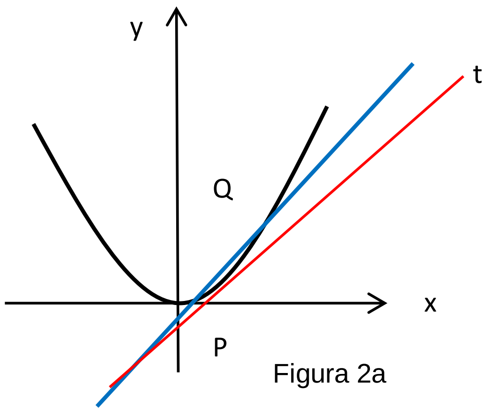


Figura 2a

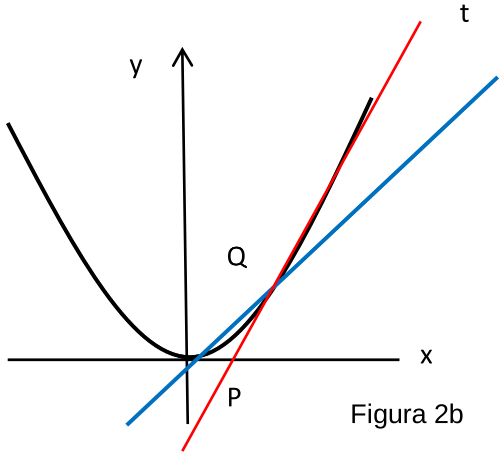


Figura 2b

A seguir, apresentamos *o Problema da Velocidade* – Para o entendimento da ideia intuitiva de limite.

<u>Exemplo 2</u> (Stewart, 2006, p. 90): *Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, 450m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.*

Solução:

Por meio de experimentos feitos séculos atrás Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo (esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após *t* segundos for chamada s(t) e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação:

$$S(t) = 4{,}9\ t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo (t = 5), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada computando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de t = 5 até t = 5,1:

$$\text{Velocidade média} = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ decorrido} = \frac{s(5{,}1)-s(5)}{0{,}1}$$

$$= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s}$$

A tabela 4 a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores:

Intervalo de tempo	Velocidade média
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5{,}1$	49,49
$5 \leq t \leq 5{,}05$	49,245
$5 \leq t \leq 5{,}01$	49,049
$5 \leq t \leq 5{,}001$	49,0049

Tabela 4 – Exemplo 3

Fica evidente que, à medida que encurtamos o período de tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A velocidade instantânea quando t = 5 é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em t = 5. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é:

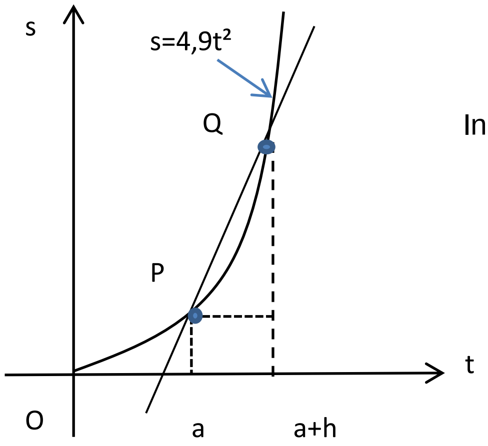
$$V = 49 \text{ m/s}$$

Percebe-se que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente para encontrar as tangentes. Na realidade há uma estreita relação entre os problemas da tangente e do cálculo da velocidade. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola e considerarmos os pontos P(a; $4{,}9a^2$) e Q(a+h ; $4{,}9(a+h)^2$) sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ é dada por

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{(a+h)-a}$$

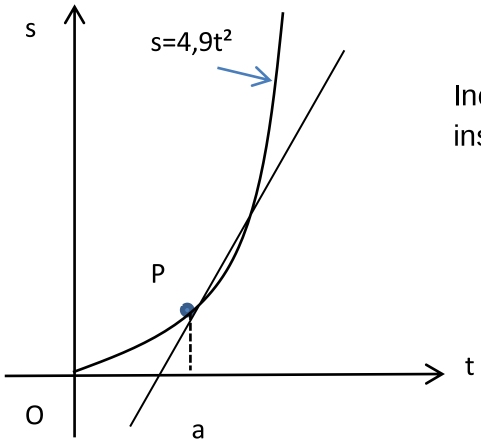
que é igual à velocidade média do intervalo de tempo [a, a+h]. Logo, a velocidade no instante t = a (o limite dessas velocidades médias quando *h* tende a Q) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P(o limite das inclinações das retas secantes).

Podemos perceber isto na figura 3a e 3b.



Inclinação da reta secante = velocidade média

Figura 3a



Inclinação da reta tangente = velocidade instantânea

Figura 3b

Os exemplos 1 e 2 mostram que para resolver os problemas da velocidade e da tangente devemos ser capazes de encontrar os limites.

3.4.2 O Sistema de quatro ações aplicado a um problema de Limite

Apresentamos uma aplicação do sistema de quatro ações da ESPL a um problema de limite. Para essa demonstração temos o exemplo 4 que traz o modelo de uma função quadrática, com o objetivo de investigar o comportamento da função para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

<u>Exemplo 4</u>: Dada a função $f(x) = x^2 - x + 2$, investigue o comportamento da função para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

***Primeira ação**: Compreender o problema*, destacando os elementos conhecidos e desconhecidos.

Temos: O Modelo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Denota-se: L é o limite da função dada e a é o valor determinado do eixo das ordenadas do ponto, onde será analisado o comportamento de f(x), para x tendendo a ***a***, ou seja, x ≠ a.

Os dados: $f(x) = x^2 - x + 2$ e a =2

Segunda ação:** Construir o modelo matemático.**

Vamos construir o modelo matemático investigando o comportamento da função definida por F(x) = x^2 – x + 2 para valores de x próximos de 2.

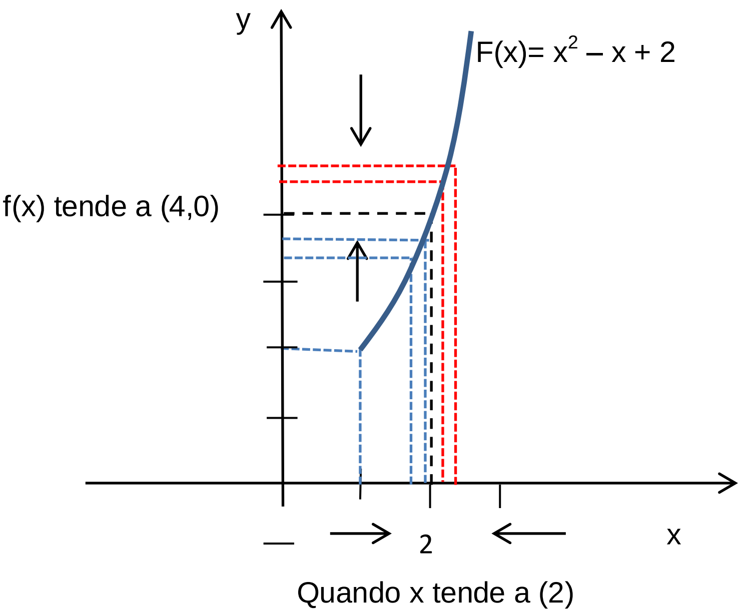
A tabela 5 a seguir fornece os valores de f(x) para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

Pela esquerda		Pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3.970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Tabela 5

A seguir apresentamos o gráfico da função na Figura 4.

Figura 4 – função y= x² – x + 2



Terceira ação*: Solucionar o modelo matemático.*

Da tabela 5 e do gráfico de f (uma curva) mostrado na Figura 5 vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), f(x) estará próximo de 4. De fato, é evidente que podemos tornar os valores de f(x) tão próximos de 4 quanto quisermos, tornando x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que “o limite da função f(x) = x² – x + 2 quando x tende a 2 é igual a 4. A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Podemos expressar esse resultado, substituindo diretamente o valor de *a* em *x*, ou seja, *x=2*, na função para identificar o limite,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2$$

$$\lim_{x \to 2} (2^2 - 2 + 2) = 4$$

Solucionar o modelo é a ação essencial deste problema. A partir do modelo matemático, das tabelas e do gráfico, pode-se perceber a solução do problema.

Quarta ação: Interpretar a solução usando a definição de limite

As Tabelas mostram que cada vez que x se aproxima de *2* pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de *4*, ou seja, quanto mais próximo x estiver de 2, mais próximo de 4 estará $f(x)$.

Prova: (Tabela 5) quando tomamos x=1,99 pela esquerda a função $f(x)$ é igual 3,9701. E quando tomamos x = 2,1 o valor de *f(x)* é igual a *4,3100*.

Do mesmo modo, se tomarmos o valor de *x = 1,999* pela esquerda a função *f(x)* será igual a 3,9970. E quando tomamos *x = 2,01* o valor de *f(x)* é igual a 4,0301. Prosseguindo, se tomarmos o valor de x = 1,9999 pela esquerda a função f(x) será igual a 3,9997. E quando tomamos x = 2,001 o valor de f(x) é igual a 4,0030. Repetindo o processo com valor de *x* ainda mais próximo, se tomarmos o valor de x = 1,9999 pela esquerda a função *f(x)* será igual a 3,9970. E quando tomamos *x = 2,0001* o valor de *f(x)* é igual a 4,0003.

Persistindo nestas substituições, podemos tomar valores ainda mais próximos de 2 pela esquerda e pela direita quanto quisermos. No entanto, sabemos que *x* nunca poderá assumir o valor de 2, desse modo *f(x)* nunca poderá resultar 4. Conclui-se, então por esta ideia, que o limite da função é 4.

Ao realizar os procedimento de análise das tabelas, as ideias perceptivas do sujeito deverão estar atentas ao comportamento de *f(x)* nas proximidades de *4* pois o limite de *f(x)* é *4*.

Em geral usa-se a seguinte notação:

Definição: escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$

e dizemos "o limite de f(x), quando x tende a *a*, é igual a L".

Isto dizer que se pudermos tomar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando-se suficientemente próximo de *a* (por ambos os lados de *a*), mas não igual a *a*".

Considerando este modelo de resolução de problema a partir do sistema de quatro ações da ESPL pode-se observar que fizemos um detalhamento das ações e uma resolução explicativa. Mas, ao solicitarmos que o estudante faça algo parecido percebemos sua grande dificuldade para a aplicação do sistema de quatro ações.

4 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

Neste capítulo abordam-se os aspectos metodológicos da pesquisa, o contexto e suas principais características de modo a facilitar a compreensão dos eventos, sustentados nas bases teóricas dos procedimentos metodológicos e da análise dos resultados.

Para o trabalho sistemático da descrição e interpretação dos fenômenos nos utilizamos de duas abordagens: qualitativa e quantitativa. Numa tentativa de descrever com mais detalhe o processo da prática metodológica e as ações executadas pelos estudantes nos utilizamos da análise qualitativa. E, por outro lado, da análise quantitativa quanto ao resultado da aprendizagem dos estudantes de acordo com os pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa, bem como das quatro ações do sistema de situações problema. Desse modo, através do enfoque misto apresentamos uma relação das análises qualitativas das ações como resultado do desempenho dos estudantes por indicadores quantitativos dessas ações. Para isto, utilizamos instrumentos tais como: observação, provas de lápis e papel, entrevistas e filmagem.

Este capítulo será desenvolvido em três partes, a primeira parte refere-se ao contexto da realização da pesquisa. A segunda parte trata-se dos sujeitos da pesquisa e a terceira parte deste capítulo, apresenta-se a caracterização geral da pesquisa, a partir dos métodos utilizados para o tratamento dos dados selecionados para a análise.

4.1 O Contexto da Pesquisa

Considerando o que motivou a pesquisa e a possibilidade de sua aplicação em uma determinada época (início do ano letivo de 2013), como também a viabilidade das pessoas envolvidas no processo deste estudo, optou-se para realizá-la no contexto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), no município de Boa Vista (Roraima), no curso de Licenciatura em Matemática.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR) é uma Instituição autônoma de natureza autárquica e, faz parte do Sistema Federal de Ensino. Como uma organização administrativa, didática e patrimonial tem estatuto próprio e está vinculado ao Ministério da Educação, sendo supervisionado pela Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica/SETEC.

O objetivo do IFRR é ministrar uma educação profissional, técnica de nível médio e cursos de formação inicial e continuada dos trabalhadores, realizar pesquisas e desenvolver atividades de extensão, além disso, oferece cursos de pós-graduação *lato sensu,* de aperfeiçoamento e especialização bem como cursos de pós-graduação *stricto sensu* de mestrado e doutorado.

O IFRR conta com um quadro de cerca de 480 servidores efetivos e oferece cursos de nível superior nos vários campi do Estado de Roraima. Na capital, Boa Vista os cursos de nível superior estão distribuídos da seguinte forma: Tecnologia em Gestão Hospitalar, Tecnologia em Saneamento Ambiental, Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Licenciatura Plena em Educação Física, Licenciatura em Ciências Biológicas, Licenciatura em Língua Espanhola e Licenciatura em Matemática.

O Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, autorizado pela Resolução nº 038 de 02 de maio de 2011 do Conselho Superior do IFRR, foi organizado baseado numa proposta de projetos integradores, que fomentam a pesquisa acadêmica e a prática profissional em torno de eixos temáticos, inter-relacionando um conjunto de componentes com finalidades comuns. Este curso funciona em regime modular semestral nos turnos matutino e vespertino, ofertando 35 vagas anuais com duração de 08 (oito) módulos semestrais, carga horária de 3.270 horas, sendo distribuídas da seguinte maneira: 2.180 horas para os componentes curriculares, 90 horas para o trabalho de conclusão de curso, 400 horas para o Estágio Curricular Supervisionado obrigatório, 400 horas de Prática Pedagógica e 200 horas de Atividades Complementares.

Após aprovação, o curso de Licenciatura em Matemática foi imediatamente implantado no segundo semestre de 2011 com uma turma de 29 estudantes, e no segundo semestre de 2012 ingressou a segunda turma com um total de 30 matriculados.

A estrutura física do IFRR apresenta instalações modernas, amplas e confortáveis. Oferece amplos laboratórios de informática e específicos a cada curso oferecido, bem como biblioteca e um restaurante. Quanto ao laboratório de Matemática, observamos bastantes materiais didáticos para uso dos estudantes e professores. As salas de aulas são amplas, limpas, confortáveis, refrigeradas com centrais de ar e, têm cadeiras tipo escolar, grandes e confortáveis.

4.2 Os Sujeitos da Pesquisa

Esta pesquisa foi planejada para ser desenvolvida na segunda turma do Curso de Licenciatura em Matemática que conta atualmente com apenas 11 (onze) estudantes matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Destes onze estudantes quatro são do sexo feminino e sete são do sexo masculino. Durante o decorrer da pesquisa, dois estudantes desistiram por motivos pessoais, um do sexo feminino e o outro do sexo masculino. Além disso, dos nove que participaram das aulas até o final da pesquisa, cinco participaram assiduamente e quatro tiveram sua participação comprometida por não comparecerem assiduamente às aulas.

O motivo que levava os estudantes a não comparecerem assiduamente nas aulas foi verificado pela professora da disciplina: eles trabalhavam durante o período diurno e sem sempre conseguiam conciliar os horários do trabalho com as aulas.

A pesquisa em sala de aula iniciou em março de 2013 e terminou em abril de 2013, no primeiro semestre letivo. Para a análise dos dados foram observadas 15 aulas cada uma com duração de 2 horas. Os estudantes aceitaram participar da pesquisa e, dessa forma, assinaram o Termo de Livre Consentimento (Anexo I) para que pudéssemos fotografar e filmar as aulas.

A professora do IFRR que aceitou fazer a intervenção pedagógica com base nos objetivos de nossa pesquisa é atualmente doutoranda em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - REAMEC/UFMT e, é Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (2006) e graduada em Bacharelado e Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal de Roraima. Atualmente é professora titular do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Roraima – IFRR e tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino-Aprendizagem da Matemática, atuando principalmente nas seguintes áreas: Ensino, Formação de professores de Matemática e pesquisas em Educação Matemática, Estatística e Modelagem Matemática.

4.3 Caracterização e Descrição da Pesquisa

A presente pesquisa se caracteriza em mista (quali-quanti), considerando sua problemática, ou seja, tanto qualitativa como quantitativa, levando-se em conta por um lado os objetivos que se pretende alcançar e por outro lado, o objeto com o qual se pretende conhecer e compreender o fenômeno a ser estudado.

Esta pesquisa inicialmente baseia-se num estudo de modelo pré-experimental, pois se trata de um único grupo, a ser estudado em curto prazo (30h/a) em que não há distribuição aleatória nem aparelhamento (SAMPIERI, 2006, p. 216).

Nossa pesquisa tem como foco o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e para isto damos mais ênfase à pesquisa qualitativa, e que também poderemos chamar de *interpretativa* visto que este termo é mais inclusivo e não dá à pesquisa a conotação de ser essencialmente não quantitativa (MOREIRA, 2011, p. 47).

Trata-se de uma pesquisa com sujeitos humanos, o que supõe a perspectiva interpretativa, visto que se criam interpretações significativas do ambiente físico e comportamental que os rodeia. [...] Uma distinção analítica crucial em pesquisa interpretativa é entre comportamento, o ato físico, e a ação que é o comportamento mais a interpretação de significados atribuídos por quem atua e por aqueles com os quais o ator interage (ERIKSON, 1986, p. 126 apud MOREIRA, 2011, p. 47).

A partir deste enfoque escolhemos o estudo de caso por tratar-se de um grupo único e singular. O estudo de caso se encaixa em uma tradição holística de pesquisa segundo a qual as características de uma parte são determinadas grandemente pelo todo ao qual pertence (MOREIRA, 2011, p. 86).

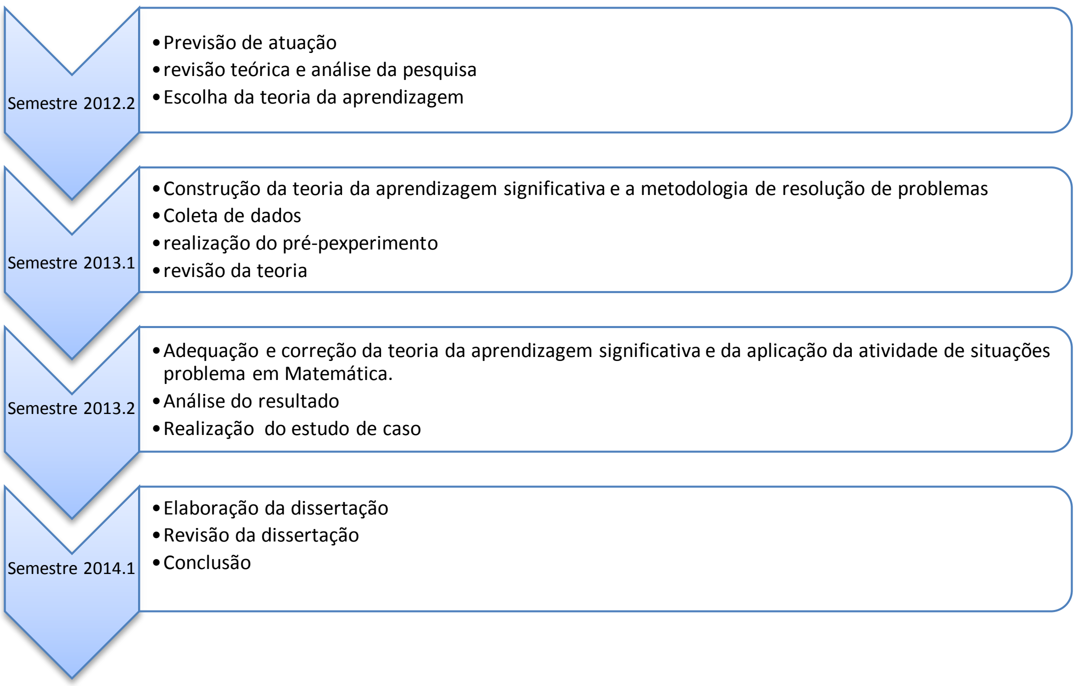
E, além disso, o método de estudo de caso permite que os investigadores retenham as características holísticas e significativas dos eventos da vida real – como os ciclos individuais da vida, o comportamento dos pequenos grupos e o desempenho escolar (YIN, 2010, p. 24).

Sendo um estudo de caso com um só grupo (11 estudantes), usaremos o tratamento múltiplo (modelo de pré-teste e vários pós-testes), ou seja, inclui um pré-teste e vários pós-testes, pois se pretende analisar o efeito da aplicação dos diversos tratamentos nas três fases avaliativas (diagnóstica, formativa e final) na unidade de limite.

A pesquisa qualitativa triangulando com a quantitativa nos permitirá perceber e analisar o processo de ensino e aprendizagem ocorrido através do sistema de quatro ações da estratégia de Situações Problema em Limites a partir dos pressupostos psicológicos e pedagógicos da teoria da aprendizagem significativa.

Em síntese, esta pesquisa obteve duas dimensões para análise: a estratégia de ensino com foco na resolução de problemas e a análise da aprendizagem dos estudantes segundo os aspectos da teoria de Ausubel.

Esta pesquisa começou a se formalizar no segundo semestre de 2012, a partir da definição do problema, a escolha do local dependia da oferta da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, bem como da disponibilidade do(a) professor(a) em aceitar a pesquisa em sua sala de aula. Desse modo apresentamos o cronograma de nossa pesquisa no Esquema 2:



Esquema 2 - Cronograma da Pesquisa

4.4 O Desenvolvimento da Pesquisa

Considerando que a pesquisa seja um processo constituído por diversas etapas, organizadas de uma maneira sequencial, lógica e dinâmica seu desenvolvimento será apresentado a seguir em cinco momentos:

4.4.1 Momento 1: Identificar a Situação Problema da Didática do Ensino de Limite no IFRR

A definição da situação problema da didática da matemática foi o primeiro passo para o início da pesquisa, ou seja, estudar o ensino e aprendizagem no conteúdo de limite em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática do Ensino Superior. E, na sequência a escolha do local que estava condicionado à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I para o início do ano letivo de 2013. Desse modo, o IFRR foi escolhido por atender aos nossos objetivos.

A professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do IFRR tem uma vasta experiência de atuação na área de docência (mais de vinte e cinco anos) na rede estadual com o ensino básico e já tinha experiência no ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, entretanto, a proposta de nossa pesquisa seria algo novo a ser trabalhado. Por isso, o planejamento de ensino da disciplina foi reelaborado, para aplicação dos pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa e da metodologia de resolução de problemas através do sistema de quatro ações da estratégia de situações em Matemática ESPM.

Contudo, a nossa proposta de pesquisa não foi uma grande surpresa para a professora regente, com relação à teoria da aprendizagem significativa, pois esta teoria também faz parte do rol de teorias a serem estudadas em seu doutorado. Entretanto, O sistema de quatro ações (ESPM) apresentou-se como algo novo, pela proposta de ensino sugerida. Assim, após resposta positiva da confirmação da professora em colaborar com nossa pesquisa permitindo sua realização em sua sala de aula, passamos a realizar vários encontros de estudo para estabelecer os pontos relevantes da pesquisa e, também definir os critérios para a elaboração dos planos de aula de acordo com a teoria da aprendizagem significativa e da metodologia de resolução de problemas.

Segundo Ausubel (1980, p.138) em qualquer disciplina dada, a estrutura cognitiva do estudante pode ser influenciada de duas maneiras: (1) substantivamente, pela inclusividade, poder explanatório e propriedades integrativas dos conceitos e princípios particulares unificadores apresentados ao estudante; (2) programaticamente, por métodos adequados de apresentação, ordenação e testes da aquisição significativa da matéria, utilizando materiais instrucionais adequadamente programados, e manipulando adequadamente as variáveis cognitivas e motivacionais.

A professora já estava preparada para começar suas aulas, seu plano de ensino já estava pronto, mas mesmo assim, estudamos algumas maneiras de adaptá-lo de acordo com pressupostos pedagógicos de Ausubel (1980), pois ele sugere que o melhor programa é feito quando começamos considerando um ou dois conceitos principais para serem ilustrados, assim como aspectos motivacionais (no caso, apresentação de situações problemas). Como a ideia principal para iniciar o conteúdo de limite seria o desenvolvimento da ideia intuitiva de limite a partir de dois problemas particulares como o problema da tangente e da velocidade, optou-se por escolher o processo de assimilação com a ideia superordenada. Além do mais, o livro texto[17] escolhido mostrava-se adequado ao processo de ensino de resolução de problemas e aos pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa.

Segundo Ausubel (1980, p. 137) o material logicamente significativo (conteúdo do assunto no contexto da aprendizagem escolar ou acadêmica) só pode ser aprendido em relação a um estudo previamente assimilado de conceitos relevantes, princípios num estudante particular, e informação que torne possível a emergência de novos significados e aumenta a sua organização e retenção.

De acordo com aprendizagem receptiva significativa que tem como fator principal a aula expositiva, a professora reelaborou seu plano de ensino levando em conta os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa. Além disso, também foram preparados “organizadores prévios”, pois, estes preenchem o vazio que existe entre o que o estudante já sabe e aquilo que ele precisa saber, se quiser adquirir novos conhecimentos, mais ativa e rapidamente (AUSUBEL, 1980).

Desde a primeira reunião para definirmos os papeis, procedimentos e ações para o início da pesquisa, a professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do IFRR, mostrou-se muito atenciosa e disposta a colaborar com o desenvolvimento da pesquisa.

Apresentamos a seguir no Quadro 6 o esboço do Plano de Ensino para a Unidade de Limite.

[17] “Cálculo” Volume I, 5ª edição de James Stewart. A maior quantidade de livros existentes na biblioteca do IFRR era desse autor e dessa edição de 2006.

Quadro 6

<table>
<tr><td colspan="4">PLANO DE ENSINO</td></tr>
<tr><td colspan="2">LOCAL</td><td colspan="2">Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR)</td></tr>
<tr><td colspan="2">DISCIPLINA/CURSO</td><td colspan="2">Cálculo Diferencial e Integral I</td></tr>
<tr><td colspan="2">MÓDULO</td><td colspan="2">Limite e continuidade</td></tr>
<tr><td colspan="2">ANO: 2013</td><td>CARGA HORÁRIA: 30h</td><td>QUANTIDADE DE AULAS: 15</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVO GERAL

Dominar os fundamentos matemáticos básicos e de Limite e continuidade das funções, de uma variável real, para o desenvolvimento do conhecimento matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVOS ESPECÍFICOS PARA O MÓDULO DE LIMITE

• Aplicar o conceito de limite à resolução de problemas através do sistema de quatro ações da ESPM.

• Aplicar os pressupostos da Aprendizagem significativa através dos meios pedagógicos dos organizadores antecipatórios, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Assimilação de uma aprendizagem superordenada.</td></tr>
<tr><td colspan="4">EMENTA

Sistema de números reais. Funções. Limite e Continuidade.</td></tr>
<tr><td colspan="4">CONTEÚDO PROGRAMÁTICO</td></tr>
<tr><td>ITEM</td><td>EMENTA</td><td colspan="2">CONTEÚDO</td></tr>
<tr><td>1</td><td>SISTEMA DE NÚMEROS REAIS</td><td colspan="2">Propriedades dos números reais. Intervalos reais e valor absoluto.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>FUNÇÕES</td><td colspan="2">Definição de Função; funções e representações gráficas de funções elementares; funções pares e ímpares; funções polinomiais, funções compostas; funções inversas; funções exponenciais e logarítmicas e funções trigonométricas.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>LIMITE</td><td colspan="2">Definição de limite; relação entre limite laterais e bilaterais; propriedades dos limites; limites indeterminados; limites infinitos.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>CONTINUIDADE</td><td colspan="2">Definição de função continua. Estudo da continuidade e descontinuidade de funções de uma variável real.</td></tr>
<tr><td colspan="4">PROCEDIMENTOS DE ENSINO</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aulas teóricas e práticas</td></tr>
</table>

As aulas teóricas serão expositivas dialogadas permeadas com atividades de situações problemas de acordo com o sistema de quatro ações da ESPM, fundamentadas na teoria da aprendizagem significativa.
Durante as aulas teóricas os estudantes serão incentivados a participar a fim de esclarecer dúvidas e contribuir com exemplos e sugestões. No decorrer das aulas haverá momentos para a resolução de problemas através do sistema de quatro ações da ESPM .
Os meios de ensino que serão utilizados: lousa e equipamento multimídia.
AVALIAÇÃO
Avaliação diagnóstica A avaliação diagnóstica não terá efeito para aprovação. A avaliação será qualitativa para análise dos conhecimentos prévios dos estudantes e quantitativa para análise do desempenho quanto ao sistema de quatro ações da ESPM.
Avaliação formativa Esta avaliação será composta de atividades (trabalhos individuais e em grupo, e listas de exercícios) e prova individual de lápis e papel, durante o desenvolvimento do conteúdo de Limite.
Avaliação final do conteúdo de Limite A avaliação final será composta de provas de lápis e papel. Esta nota final do conteúdo de limite será parte integrante da avaliação somativa da disciplina, que será obtida pela média aritmética de três avaliações parciais. A nota mínima para aprovação, das avaliações parciais é de 7,0 e pelo menos 60h/a de frequência.
REFERÊNCIAS
Referências Básicas: LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, c 1994. STEWART, James. Cálculo. 5ª ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
Referências Complementares: ANTON, Howard; BIVENS, IRl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6ª. Ed. revisada e ampl. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2007. GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

4.4.2 Momento 2: Diagnosticar os Conhecimentos Prévios dos Estudantes

Antes de iniciar as aulas definimos que seria feito um teste para diagnosticar o conhecimento prévio dos estudantes que participariam da pesquisa, bem como analisar suas respostas diante dos problemas apresentados para verificar se eles aplicariam alguma estratégia de resolução de problemas.

Por meio do pré-teste (avaliação diagnóstica) buscou-se identificar nos estudantes: (1) a aplicação e o domínio de conceito de funções, tipos de funções, intervalos e representações gráficas de funções e (2) o uso de estratégia de resolução de problemas, ou seja, o modo que cada um resolveu cada problema.

Embora neste momento a estratégia de situações problemas através do sistema de quatro ações não tenha sido apresentada aos estudantes, contudo a maneira como os estudantes resolveram os problemas escolhidos foi analisada com base neste sistema, visto que nosso objetivo foi verificar se os estudantes, além de ter conhecimento sobre o assunto abordado, tinham aplicado alguma estratégia de resolução de problemas ou se tinham respondido a algum indicador essencial, mesmo que de forma implícita. Como a resolução de problemas matemáticos faz parte da proposta curricular para o ensino da Matemática no Ensino Médio é concebível que se espere que os estudantes no Ensino Superior apliquem alguma estratégia de resolução dos problemas.

A partir da análise dos conhecimentos prévios dos estudantes verificados pelo pré-teste (avaliação diagnóstica) e questionamentos feitos aos estudantes nas primeiras aulas, a professora elaborou organizadores antecipatórios (aulas antecipatórias ao conteúdo de limite) sobre números reais (igualdades, desigualdades, valor absoluto, intervalo) e funções para serem aplicados em duas aulas com duração de 4 (quatro) horas.

Para Stewart (2006, p. 9) o objeto fundamental do cálculo são as funções. Desse modo, seu estudo prévio é muito relevante para melhor assimilação do conteúdo de limite. Assim, foram preparadas aulas que tratam das ideias básicas sobre as funções e seus gráficos, como também as formas de combiná-los e transformá-los. Enfatizando que uma função pode ser representada de várias maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico e até mesmo por meio de palavras.

Segundo Ausubel (1980, p. 138) os organizadores antecipatórios são apresentados aos estudantes antes do próprio material a ser aprendido e aumentam os efeitos das duas variáveis: (1) a disponibilidade, na estrutura cognitiva do estudante, de ideias de esteio especificamente relevantes num nível ótimo de inclusividade, generalização e abstração; (2) a extensão na qual tais ideias são discrimináveis de conceitos similares e diferentes no material de aprendizagem.

4.4.3 Momento 3: Planejar a Sequência Didática do Conteúdo de Limite.

Para a realização da sequência didática da unidade de limite desenvolveu-se um planejamento curricular do conteúdo de Limite considerando os pressupostos da aprendizagem significativa dando ênfase à formação de conceito, identificação dos conhecimentos prévios dos estudantes, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, incluindo o sistema de quatro ações da ESPM para a resolução de problemas no conteúdo específico de Limite. Paralelamente, também foram elaborados os instrumentos de observação e, providenciado o equipamento de filmagem para a filmagem das aulas.

Os estudos da teoria da aprendizagem e da estratégia de situações problemas a serem aplicadas ao conteúdo de limite ocorreram no período de dezembro de 2012 até março de 2013. A intervenção da sequência didática na Disciplina Cálculo Diferencial e Integral I iniciou no dia 11 de março de 2013 e foi concluída em 20 de abril de 2014. A organização do plano de ensino contemplou aulas expositivas e práticas sobre os assuntos pressupostos para o conteúdo de limite. Também definimos a quantidade mínima de aulas (30 h/a) para a aplicação do conteúdo de limite, com vista ao atendimento do calendário acadêmico da Instituição e aos objetivos da pesquisa.

No Quadro 7 apresentamos um planejamento para o desenvolvimento da sequência didática do conteúdo de limite.

Quadro 7

PLANEJAMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE LIMITE		
CONTEÚDO	**O QUE FAZER**	**COMO FAZER**
Introdução ao conceito de limite: • O Problema da Tangente; • O Problema da Velocidade; • A relação entre o problema da tangente e o problema da velocidade;	Aplicação da aprendizagem superordenada iniciando com dois problemas básicos do cálculo diferencial: o problema da Tangente e da Velocidade. Inicialmente o conceito de limite surge dos problemas da Tangente a uma curva e da Velocidade de um carro ou um objeto em queda livre. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis.	• Através de aulas expositivas e práticas. • Aplicar o conceito de limite por meio de resolução de problemas, a partir do sistema de quatro ações da ESPM. • Apresentar a ideia intuitiva de limite ilustrada por retas secantes tendendo a uma reta tangente. A atenção neste momento está voltada para a compreensão do comportamento da função representada pelas retas secantes se aproximando da reta tangente.

	O objeto fundamental do cálculo são as funções (Stewart, 2006). Estudar as propriedades essenciais do conceito de limite de uma função num ponto. Abordar o Problema da Velocidade com o intuito de calcular a velocidade instantânea de um corpo em movimento, demonstrando que essa velocidade instantânea é definida como o valor do *limite* das velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores.	Com isso, o estudante deverá observar que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes. • Após a explicitação detalhada da tarefa o estudante deverá ser capaz de resolver o problema aplicando o sistema de quatro ações da ESPM, bem como fazer a transferência para outra situação problema, "o problema da velocidade", dando sequência à ideia intuitiva de limite, será realizado individualmente, mas posteriormente este problema e o da tangente (dado anteriormente) serão debatidos no grupo. • Em cada situação nova, são inseridos novos conceitos que estão diretamente envolvidos no contexto do problema. Através do Problema da Velocidade serão explicitados os fenômenos de velocidade média, expressa na relação de mudança de posição pelo tempo decorrido, chegando à velocidade instantânea composta nesta relação. • O estudante deverá perceber e explicitar a relação de limite que existe entre o Problema da Tangente e o Problema da Velocidade.
O limite de uma função: • O Problema do Tanque; • O Problema da Taxa dos Batimentos Cardíacos;	Orientar sobre a inserção de novos problemas, cuja solução é encontrada a partir do conceito de limite, já atribuído nos problemas anteriores. Formalizar as ideias iniciais do conceito de limite, aplicando os limites laterais. Tem-se o objetivo de fazer com que o conceito de limite se converta numa ideia mais consistente e, com maior abstração, que poderá ser aplicada em outras situações usando a simbologia matemática.	Os estudantes aplicam o sistema de quatro ações da ESPM, para resolver o problema "vazamento de um tanque" em litros por minuto. Induzidos por questionamentos discursivos que os direcionam a encontrar uma solução minuciosamente detalhada para facilitar a compreensão dos novos conceitos envolvidos neste problema. Os questionamentos do problema visam promover maior percepção dos conceitos e das aplicações a partir do esboço gráfico, na inclinação das retas, nos pontos, na descrição do fenômeno realizado pelo estudante. • Partindo para outro contexto, mas fazendo uso do método da reconciliação integradora, foi aplicado o problema da "taxa de batimentos cardíacos". A professora orienta os estudantes a fazer uso do passo a passo da ESPM e, com perguntas para que

		façam uma análise do problema antes de tentar resolvê-lo. Este problema aborda elementos estudados no Problema da Tangente e da Velocidade. Após encontrar a solução do problema os estudantes devem expor de forma escrita suas conclusões, fazendo relações com ênfase nas semelhanças e diferenças. • A introdução do estudo de limites laterais é conduzida com uma tarefa de análise do comportamento da função nas vizinhanças de um número, no eixo das ordenadas e análise do comportamento no eixo das abcissas. Os estudantes compõem duas tabelas atribuindo valores para x, o mais próximo possível do número que se quer alcançar, pela direita e pela esquerda. Os estudantes devem perceber o comportamento de proximidade ao número por ambos os lados e, assim são também estimulados a explicar tal comportamento.
• Cálculo dos Limites usando suas Leis. • Identificar as propriedades essenciais do conceito e da definição de limites infinitos; • Propriedades dos Limites; • A Definição Precisa de Limite; • Calcular Limite a partir da Definição Geral; • Continuidade; • Limites no Infinito; • Calculo de Limites Infinitos no Infinito; Assíntotas Horizontais.	Apresentam-se para os estudantes as cinco Propriedades de Limite: o limite da soma é a soma dos limites; o limite de uma diferença é a diferença dos limites; o limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função; o limite do produto é o produto dos limites e o limite do quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja 0). As atividades são preparadas com o intuito de aplicar as propriedades nos exemplos dados do conceito geral. Agora os exercícios são mais abstratos e exige do estudante maior conhecimento do conteúdo. Apresentam-se mais listas de exercícios que não se apresentam como situações problemas. A Definição do conceito de limite é demonstrada a partir de uma função. Definir as funções contínuas e desenvolver o conceito de continuidade, apresentado no problema da velocidade para explicar que este tipo de problema apresenta continuidade. Usar os exemplos: a direção percorrida por um veículo; mover a caneta sob o papel formando traços, sem	Apresentação de novas tarefas cuja solução é através da definição intuitiva de limite já aplicado em situações anteriores. Os estudantes são estimulados a explicar a tarefa realizada por meio das explicitações solicitadas nos questionamentos da tarefa ou de forma verbalizada, quando solicitada pela professora. A definição precisa do conceito de limite será aplicada após as operações de análises do comportamento dos gráficos e aplicações da definição usando a simbologia matemática de limite. Lembrando que a ideia intuitiva de limite é imprecisa e inadequada, pois não pode ser aplicada para todos os tipos de problemas. No entanto, para se obter as informações mais detalhadas aplica-se a *definição precisa do limite* de $f(x)$ quando x tende a ***a*** é L, descrita: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ Se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 <$

	interrupção. Apresentar o conceito de descontinuidade e aplicação em exemplos nas funções contínuas e descontínuas.	$\lvert x - a\rvert < \delta$ então $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$.

4.4.4 Momento 4: Executar e Avaliar

A organização do ensino foi realizada com base no conteúdo de Limite e os pressupostos pedagógicos da aprendizagem receptiva significativa, a partir das etapas da aprendizagem superordenada conforme apresentamos no Quadro 8.

Quadro 8 – Aprendizagem Superordenada Aplicada ao Estudo de Limite

ETAPAS DA ASSIMILAÇÃO	**APRENDIZAGEM SUPERORDENADA Aplicada ao Estudo de Limite**
I DIAGNÓSTICO DO CONHECIMENTO PRÉVIO.[18]	• O professor apresenta a ideia nova, potencialmente significativa que é mais inclusiva e menos estável. Esta ideia nova vai interagir com a ideia já existente na estrutura cognitiva do estudante que é menos inclusiva e mais estável. • Aqui nesta fase temos duas hipóteses: 1) o estudante tem conhecimento prévio adequado e satisfatório para assimilar a nova ideia; 2) o estudante não tem conhecimento prévio necessário e suficiente para assimilar a nova ideia. Então, o professor, a partir da avaliação diagnóstica, percebe, por exemplo, que se comprova a segunda hipótese, então prepara os organizadores antecipatórios, para preparar a estrutura cognitiva do estudante para o processo de aprendizagem superordenada. No nosso estudo, a nova ideia é sobre limite e os organizadores antecipatórios foram elaborados sobre o conceito de função e números reais (pré-requisito para o estudo de limite).
II - AQUISIÇÃO DO SIGNIFICADO DE A'.	• Nesta etapa acontece o processo interativo da ideia nova com a já existente na estrutura cognitiva do estudante. Desse processo surge uma ideia modificada, um novo significado. • O professor orienta sobre o sistema de quatro ações para trabalhar as atividades de situações problema em matemática (ESPM).
III RETENÇÃO INICIAL DE A'.	• Nesta etapa são introduzidas varias ideias particulares para o aperfeiçoamento da ideia intuitiva de limite. A professora introduziu inicialmente duas situações problema: 1) O problema da tangente para que o estudante perceba que a inclinação da tangente é o limite para as inclinações das retas secantes; 2) O problema da velocidade para que o estudante perceba que o cálculo da velocidade instantânea de um corpo em movimento é o valor limite das velocidades médias em período de tempo cada vez menor. • O estudante deverá compreender essa ideia de aproximação de um ponto sem chegar realmente a esse ponto. • O professor continua orientando o estudante a resolver os problemas de acordo com a ESPM.

[18] Incluímos esta etapa do diagnóstico do conhecimento prévio, pois apesar da escolha deste tipo de aprendizagem se adequar ao nosso objetivo foi necessário passar por esta etapa (que não existe no quadro original de Ausubel (1980).

IV ESQUECIMENTO DE $A^{'}$.	• O novo significado deixa de ser dissociável das ideias particulares. • Nesta fase o conhecimento já vai ficando mais estável, o estudante vai se aproximando da ideia geral de limite, mas o professor poderá continua escolhendo os exemplos particulares mais abstratos para que o novo significado se estabilize um pouco mais. • O estudante ainda está se adaptando à ESPM.
V DIFERENCIAÇÃO ADICIONAL DE $A^{'}$.	• Nesta etapa o professor faz uso do principio da diferenciação progressiva, usa exemplos, situações problema para diferenciar o conhecimento de aproximação, através de gráficos, tabelas, etc., aumentando o nível de complexidade e abstração dos problemas. • Também aqui se utiliza da reconciliação integradora quando evidencia as semelhanças e diferenças entre os exemplos, conceitos, definições e situações problema, trabalhando as contradições e eliminando os possíveis conflitos de opiniões. • O estudante já demonstra maior adaptação ao método do sistema de quatro ações da ESPM. • O professor introduz a definição de limite em sua forma mais abstrata e mais complexa, com os exercícios voltados para a estabilidade deste conhecimento.
VI RETENÇÃO POSTERIOR DE $a_{m+1}^{'}, a_{m+2}^{'}, \ldots, a_{n}^{'}$.	• Aqui o professor continua com assuntos de limite ampliando os conhecimentos dos estudantes com novos exemplos e situações problema usando os princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integradora. • O estudante já é capaz de maior entendimento e de expor com mais autonomia suas inferências. • O conhecimento começa a se automatizar, já havendo uma perda gradual da dissociabilidade das ideias particulares. O conceito mais formal de limite já é mais compreensível para os estudantes. • O professor apresenta situações problemas mais complexas, com novas situações e também problemas envolvendo a definição mais formal de limite.
VII ESQUECIMENTO DE $a_{1}^{'}, a_{2}^{'}, \ldots, a_{n}^{'}$.	• Aqui nesta etapa há o esquecimento das ideias particulares que já foram trabalhadas, pois a ideia mais geral de limite se sobrepõe e o conhecimento já está mais estabilizado e conforme for mais trabalho com exercícios e resolução de problemas vai se automatizando.

Para Ausubel (1980, p. 102) a aprendizagem receptiva é um processo ativo, e mesmo que a substância da aprendizagem seja essencialmente apresentada e a atividade envolvida se restrinja a assimilar efetivamente novos significados e integrá-los na estrutura cognitiva, depende em parte do que o estudante necessita para o significado integrativo e do vigor de sua capacidade de autocrítica. Por outro lado, o material a ser apresentado, a maneira como este material é apresentado e da metodologia usada pelo professor são fatores relevantes para que possa haver uma aprendizagem significativa.

A aprendizagem receptiva foi aplicada através de aulas expositivas combinadas com a metodologia de resolução de problemas, o que promoverá aulas práticas na classe e nos laboratórios de matemática e informática.

Nas duas primeiras aulas, a partir do teste diagnóstico foram aplicados os organizadores prévios sobre números reais (igualdade, desigualdade valor absoluto, intervalos), funções e orientações do sistema de quatro ações da ESPM. Na sequência foi introduzida a ideia intuitiva de limite a partir dos problemas particulares da tangente e da velocidade. De acordo com a aprendizagem superordenada a ideia intuitiva de limite foi trabalhada a partir da aproximação de um ponto a outro, o deveria ser percebido, inicialmente com os dois conceitos trabalhados: tangente e velocidade relacionados com o limite.

As aulas foram planejadas para serem executadas conforme os princípios: os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora, de forma expositiva, dialogada e prática (exercícios e resolução de problemas). As práticas de situações problemas foram orientadas a partir do sistema de quatro ações segundo Mendonza (2009).

A professora procurou elaborar situações problemas, inicialmente para que os estudantes tivessem uma ideia de aproximação, ou seja, uma ideia intuitiva de limite, ampliando a cada apresentação o nível de complexidade e abstração, até se chegar à definição formal de limite. Apresentou outras atividades com o objetivo de esclarecer e estabelecer semelhanças e diferenças, eliminar conflitos e dúvidas. Apresentou várias listas de exercícios de aplicação das propriedades de limites, sempre esclarecendo as dúvidas e elaborando questionamentos para que os estudantes pudessem perceber contradições e apresentar análises críticas a respeito das resoluções encontradas. Desse modo, aplicava os pressupostos pedagógicos da teoria da aprendizagem significativa: diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

Para analisar e avaliar os resultados dos testes e pós-testes usamos o modelo de avaliação diagnóstica, formativa e final, levando em consideração, de um lado, o processo e de outro, momentos pontuais das práticas avaliativas.

Para Ausubel (1980, p. 499) a medida e a avaliação são centrais no conceito de aprendizagem em sala de aula. A avaliação possibilita (1) a verificação do que o estudante já conhece antes de se tentar ensinar-lhe algo mais; (2) vigiar como a sua aprendizagem está ocorrendo, para corrigir, esclarecer e consolidar esta aprendizagem; e (3) vigiar a eficácia de diferentes métodos de ensino, e de diferentes maneiras de organizar e sequenciar os assuntos, assim como verificar até que ponto seus objetivos estão sendo alcançados.

Além disso, Ausubel (1980) também enfatiza a importância de medir a compreensão dos conceitos-chave em cada disciplina; dos pré-teste e pós-teste a longo prazo, assim como pós-teste simultâneos e imediatos; e também da aprendizagem para o domínio; bem como de testar diretamente o conhecimento de uma aprendizagem prévia ao medir a capacidade de aprender material sequencialmente dependente.

Segundo Pais (2001, p.22) “a análise do saber ensinado coloca em evidência os desafios da metodologia de ensino, a qual não pode ser dissociada da análise dos valores e dos objetivos da aprendizagem”. Esta citação corrobora com o nosso objetivo nesta pesquisa. Contudo, sabemos que “não há garantia de que no plano individual o conteúdo aprendido pelo estudante corresponda exatamente ao conteúdo ensinado pelo professor”.

Para realizar a análise referente à aprendizagem dos estudantes escolhemos alguns problemas dentre os vários apresentados nas três fases avaliativas: diagnóstica, formativa e final, conforme abaixo relacionado:

- Avaliação diagnóstica – o teste diagnóstico constou de seis questões, destas, selecionamos três problemas envolvendo o conteúdo de funções para a percepção sobre o conhecimento prévio dos estudantes.
- Atividade formativa – Nesta fase aplicou-se vários tipos de avaliação (exercícios, testes, trabalhos individuais e em grupo). De um dos testes aplicado, selecionamos quatro questões, envolvendo a ideia de aproximação a um ponto tanto pelo lado direito quanto pelo esquerdo com modelos matemáticos como gráficos e tabelas, e, também problemas mais complexos e abstratos com aplicação da definição de limite.
- Do teste final da unidade do conteúdo de limite selecionamos duas questões com o objetivo de perceber a aprendizagem sobre as leis de limite e da definição mais formal em sua forma mais abstrata e, também sobre o conceito de continuidade.

Os parâmetros para a análise do teste diagnóstico são: se os estudantes sabem resolver problemas envolvendo o conceito de função; se os estudantes usaram alguma estratégia de resolução de problemas, se conseguem montar um modelo matemático adequado para o problema em questão; se fazem desenhos e usam fórmulas, se explicam suas ações sobre a resolução; se usam a linguagem matemática apropriada ao conteúdo abordado.

Os parâmetros para análise da avaliação formativa e final são: se os estudantes conseguem aplicar o sistema de quatro ações nas situações problemas apresentadas; se conseguiram integrar o conhecimento abordado; se assimilaram o conceito de limite aplicando nas situações problemas; se conseguem resolver problemas mais abstratos.

Os parâmetros para as análises qualitativas e quantitativas do desempenho dos estudantes nas três fases avaliativas foram analisados conforme o sistema de quatro ações da estratégia de situações problemas em Limite (ESPL).

4.4.5 Momento 5: Analisar e Elaborar o Relatório de Pesquisa

A análise de nosso estudo de caso único dá ênfase à aprendizagem significativa a partir do sistema de quatro ações de situações problemas do conteúdo de Limite. Para a análise deste estudo de caso usou-se a técnica das séries temporais cronologicamente, considerando as avaliações: diagnóstica, formativa e final (pré-teste, pós-teste e teste final).

A essência da análise da avaliação diagnóstica é para obter informação sobre o conhecimento prévio já existente na estrutura cognitiva do estudante. Durante o processo, a analise dos dados foi realizada a partir das informações colhidas nas aulas expositivas e práticas do conteúdo de limite, observando a prática docente a partir da aplicação da metodologia de resolução de problemas e os pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa, bem como da avaliação formativa realizada através de exercícios e questionamentos orais durante as aulas expositivas e provas de lápis e papel.

A análise qualitativa segundo Sampieri (2006, p. 491) possui objetivos centrais: organizar os dados; organizar as categorias, os temas e os padrões; compreender profundamente o contexto dos dados; descrever as experiências das pessoas estudadas de sua ótica, em sua linguagem e com suas expressões; interpretar e avaliar unidades, categorias, temas e padrões; explicar contextos, situações, fatos e fenômenos; gerar questões de pesquisas e hipóteses; relacionar os resultados da análise com a teoria fundamentada ou construir teorias.

Desse modo, nos empenhamos em analisar as respostas dos estudantes a partir das situações problemas escolhidas a fim de perceber a ocorrência da aprendizagem significativa, considerando características qualitativas e o desempenho dos estudantes na resolução de problemas a partir das categorias indicadas pelo sistema de quatro ações da estratégia de situações problemas de Limite.

A fase formativa comporta a elaboração explicativa do efeito da estratégia da ESPL com base nas análises de quatro problemas, realizados durante o período e selecionados de acordo com as características essenciais das definições e conceitos de limite.

O teste final foi elaborado para se perceber o aprendizado do estudante sobre a definição formal e precisa de limite e do conceito de continuidade e descontinuidade de uma função. Do teste final realizado, escolhemos dois problemas como unidade de análise e, além do conteúdo já assimilado pelos estudantes, verificar a possibilidade de transferência do conhecimento para novas situações problemas.

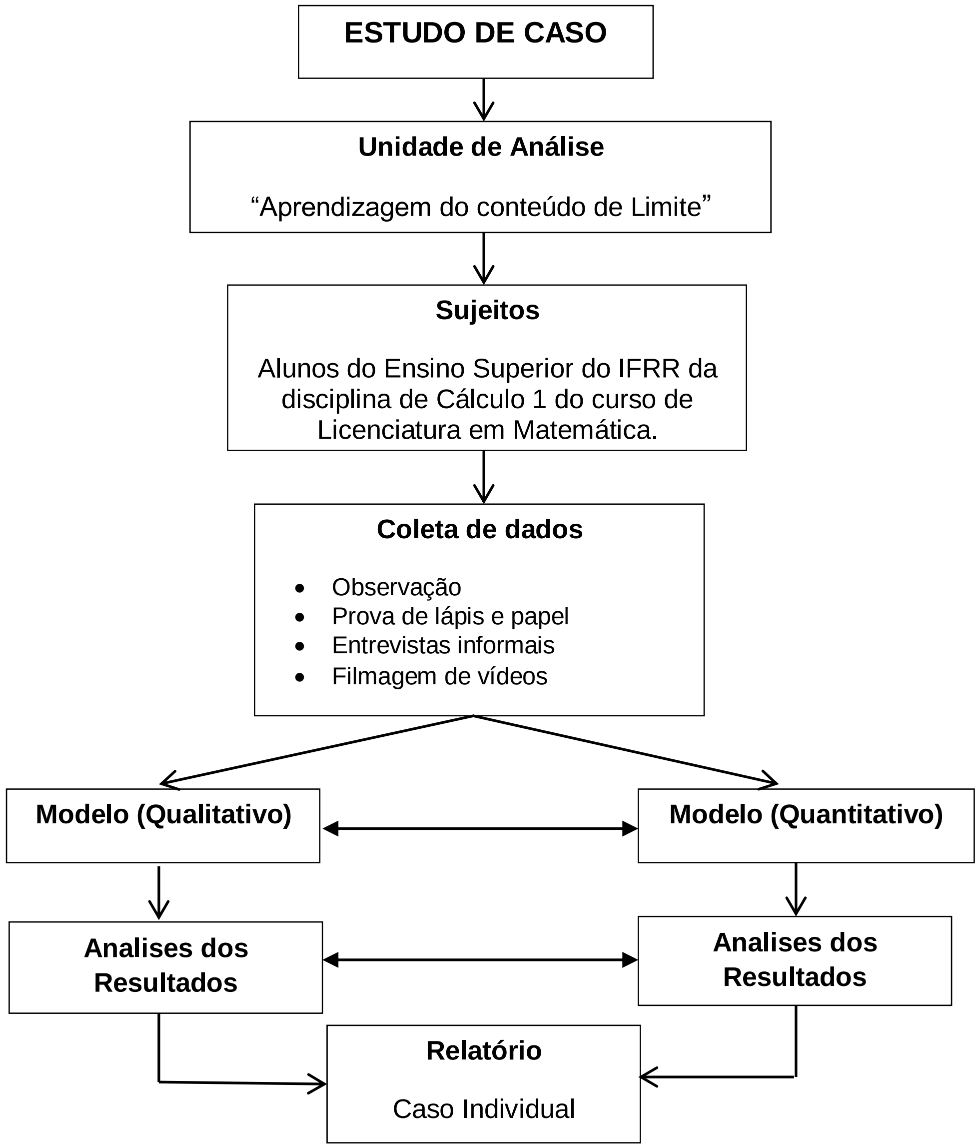
4.5 O Estudo de Caso

O estudo de caso compreende um método abrangente, pois permite uma visão ampla sobre a lógica do projeto, as técnicas de coleta de dados, as abordagens específicas e às análises de dados (YIN, 2010).

E, além disso, ajusta-se a alguns critérios tais como: i) Ter fácil acesso ao caso; ii) Pode-se ter boas relações com os informantes; iii) O investigador pode desenvolver seu papel todo o tempo que seja necessário; iv) Assegura-se a qualidade e credibilidade do estudo (RODRIGUEZ, 1996, apud MENDOZA, 2009).

A seguir no esquema 3, apresenta-se como se processará a pesquisa com o enfoque misto do estudo de caso.

Esquema 3



Este estudo de caso envolve um grupo de 11 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A unidade de análise é o conteúdo de Limite (30 horas/aula) que ocorreu no período de 11 de março a 20 de abril de 2013. O objetivo deste estudo é perceber quais as variáveis ou elementos que mais influenciam na aprendizagem do conteúdo de Limite usando a metodologia de resolução de problemas e a teoria da aprendizagem significativa.

Nossa proposta para este estudo foi realizar uma triangulação do método de resolver problemas matemáticos através de um sistema de quatro ações da atividade de situações problemas em limite e uma teoria da aprendizagem (aprendizagem significativa), com o intuito de promover uma aprendizagem significativa do conteúdo de Limite, visto a grande dificuldade encontrada pelos alunos em assimilar este conhecimento.

Durante várias décadas considerou-se que os enfoques quantitativos e qualitativos fossem perspectivas opostas, inconciliáveis e que não deviam se misturar, mas Sampieri (2006, p. 12) revisando os estudos científicos dos últimos anos, observou “uma tendência crescente nesse sentido: a fusão, ou seja, a união dos dois enfoques, a convergência ou triangulação”.

Assim, para nossa pesquisa a partir do enfoque qualitativo o sistema de ações se converte em categorias e do quantitativo em variáveis. A ideia geral para o final das analises foi de complementação, pois durante o processo de pesquisa tínhamos um olhar voltado mais para o enfoque qualitativo, ou seja, para o processo de como os estudantes assimilavam o conceito de limite a partir da metodologia de resolução de problemas fundamentada na aprendizagem significativa.

No enfoque quantitativo se medirá a variável “aprendizagem da atividade de situações problema, isto é, o desempenho dos estudantes na resolução de problemas do conteúdo de Limite (“Y”), quando se aplica o “sistema de ações da atividade de situações problema em Limites (“X”).

Contamos com múltiplas fontes de evidências como a observação direta, entrevista e filmagem das aulas do conteúdo de limite, conforme mencionado por Yin (2010, p.142) “um importante ponto forte da coleta de dados do estudo de caso é a oportunidade de usar diferentes fontes contemporâneas de evidência”.

As tarefas e as provas realizadas pelos estudantes foram transcritas para um formulário próprio, na ordem primeiramente qualitativa e, posteriormente, quantitativa. Na continuação, ambos os enfoques são utilizados na fase inferencial das discussões, de forma independentes. Através do modelo misto pretendeu-se demonstrar o resultado a partir de análises descritivas, triangulando-se esses resultados, disponibilizados nas descrições das ações realizadas, demonstradas nas tabelas de desempenho da resolução de problemas, com base nos indicadores essenciais de cada ação.

4.5.1 O Enfoque Quantitativo

A partir do estudo qualitativo da pesquisa procurou-se analisar o efeito das categorias do sistema de quatro ações, triangulado com o desempenho dos estudantes de forma quantitativa através dos indicadores essenciais de cada ação em uma escala de 1 a 5 pontos.

Em nossa pesquisa usamos o delineamento pré-experimental, em que se trabalhou com um grupo formado por uma turma de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima, da disciplina de Cálculo I[19], no conteúdo de Limites. “Este delineamento é usado quando a situação não permite o uso de delineamentos verdadeiramente experimentais” (Moreira, 2011, p. 134).

Desse modo, seguir-se-á aqui a notação clássica de Campbell e Stanley no que se refere à designação de observações e tratamentos. Designa-se pela letra “O” uma observação. A letra “O” indica uma observação particular de uma série, não necessariamente em ordem cronológica. O índice funciona apenas como um rótulo para uma dada observação. Assim, designa-se pela letra “X” a um tratamento (MOREIRA, 2011 p 130).

Escolhemos o modelo de pré-teste e vários pós-testes com um único grupo, primeiro porque este grupo mostrou-se pequeno e não havia outra turma estudando o mesmo conteúdo. Então, trabalhou-se com séries temporais, inicialmente aplicando-se ao grupo um pré-teste e, posteriormente, aplicando-se o tratamento pré-experimental com vários pós-testes intercalados, conforme modelo abaixo apresentado no Quadro 9.

Quadro 9

MODELO DE PRÉ-EXPERIMENTO
$\mathbf{G_{único}\ \ O_0\ X_{E1}\,O_1\ X_{E2}\,O_2\ \ X_{E3}\,O_3\ \ X_{E4}\,O_4\ \ X_{E5}\,O_5}$
Legenda: $O_{0\ a\ 5}$: Uma observação. G_{unico} : Grupo de estudantes do IFRR $X_{1\ a\ 5}$: Tratamento (intervenções) de acordo com as Etapas da assimilação segundo a teoria da aprendizagem significativa.

[19] Para efeito de redução de texto, refere-se à Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

1ª ETAPA O_0	2ª ETAPA X_{E1} O_1	3ª ETAPA X_{E2} O_2	4ª ETAPA X_{E3} O_3	5ª ETAPA X_{E4} O_4	6ª ETAPA X_{E5} O_5
Verificação do conhecimento prévio com um pré-teste	Apresentação da nova ideia Organizadores prévios ESPL	Aquisição da nova ideia Retenção inicial ESPL	Aplicação da diferenciação progressiva e reconciliação integradora ESPL	Aplicação da diferenciação progressiva e reconciliação integradora ESPL	Avaliação final

Neste modelo, aplica-se primeiramente um pré-teste O_0 (avaliação diagnóstica) para observação dos conhecimentos prévios dos estudantes. Posteriormente aplica-se ao mesmo grupo um tratamento X_{E1}, *utilizando os organizadores prévios sobre números reais e funções*, aplicando-se nesta segunda etapa, então, um pós-teste O_1. Prosseguindo com a sequência temporal do tratamento, X_{E2}. Neste momento o estudante recebe informações do processo de resolução de problemas, ou seja, da estratégia do sistema de quatro ações da ESPM e, sob a orientação da professora exercita sua aplicação iniciando o processo de ensino aprendizagem de acordo com a teoria da aprendizagem significativa receptiva. A professora inicia com problemas da tangente e velocidade para a assimilação da ideia intuitiva de limite, no fim da etapa 3 aplica-se um pós-teste O_2. Em seguida, aplica os *princípios da diferenciação progressiva* envolvendo o conceito de limite de tangente e velocidade e, trabalha com vários exemplos de situações problema com gráficos e tabelas para que o estudante perceba a ideia de proximidade a um ponto e então, aplica-se o pós-teste O_3, concluindo-se a etapa 4.

No tratamento X_{E3} para a retenção do conceito de limite a professora regente apresenta aos estudantes as propriedades de limite, envolvendo o conhecimento dos vários tipos de funções (trigonométricas, exponenciais e logarítmicas) vários exemplos diferenciando e reconciliando conceitos para que o novo conhecimento torne-se mais estável. Nesta fase, apresentam-se tarefas para o estudante exercitar e adquirir habilidade de resolver problema de limites. Na sequência do processo, no tratamento X_{E4} o estudante irá internalizar o conhecimento, aqui a professora apresenta vários exemplos e situações problemas a fim de tornar mais estável o conceito de limite através do principio da reconciliação integradora e então, se aplica o pós-teste O_4. Na continuação e, para finalizar a professora apresenta o conceito de continuidade e trabalha exemplos da aplicação de limite de maneira mais formal e abstrata. A professora verifica através das avaliações anteriores as dificuldades dos estudantes e faz uma revisão para reforçamento do aprendizado, aplicando o tratamento X_{E5} completa o processo de ensino aprendizagem e, portanto, aplica-se também um teste final O_5.

No estudo quantitativo definição conceitual de X é o sistema invariante de quatro ações com suas operações para ser utilizado na transformação do objeto de estudo da ESPL. A definição operacional é a aplicação do sistema invariante de quatro ações com suas respectivas operações na resolução de situações problema na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (conteúdo de limite), no IFRR.

Na variável quantitativa “Aprendizagem através da ESPL (Y)”, a definição conceitual é a capacidade de resolver situações problema em limite. Operacionalmente “Y” é definida como a aprendizagem ou a diferença de aprendizagem comparando um ponto inicial (avaliação diagnóstica) com outro (avaliação final), a fim de resolver situações problemas em limite e estabelecer transferência para novas situações nesta disciplina.

O indicador da variável “Y” é a capacidade demonstrada no cumprimento de cada uma das ações da ESPM e suas dimensões são: i) nível da ação de compreender o problema (Y_1); ii) nível da ação de construir o modelo matemático (Y_2); iii) nível da ação de solucionar o modelo matemático (Y_3) e, iv) nível da ação de interpretar a solução (Y_4). Estes níveis (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) serão avaliadas com os seguintes critérios: ruim (1), regular (2), bom (3), muito bom (4) e, ótimo (5)

A definição conceitual da variável (Y) aprendizagem do conteúdo de limite é o processo em que se dá a aprendizagem significativa, ou seja, é a transformação da variável X pelas etapas da assimilação da aprendizagem superordenada até produzir novos significados (Y). A definição operacional da variável (X) está na aplicação de cada uma das ações da ESPL.

O indicador da variável D, direção de ensino, é o nível de cada uma das fases pelas quais se processa o ensino de acordo com os pressupostos da aprendizagem e retenção significativa. As dimensões da variável D são: i) os objetivos do ensino (D_1); ii) estado de partida do processo dirigido (D_2); iii) estados do processo de assimilação (D_3); informação para o feedback ou retroalimentação (D_4) e iv) enlace do retorno ou correção (D_5).

As diferenças qualitativas ou quantitativas observadas no desempenho dos estudantes após a aplicação da estratégia do sistema de quatro ações da ESPM podem ser tomadas como evidência do efeito sobre a aprendizagem cognitiva dos estudantes (MOREIRA, 2011, p.135).

O plano de ensino (X_1) foi organizado a partir dos pressupostos da aprendizagem receptiva significativa abordando definições e conceitos do conteúdo de limites, trabalhados de maneira gradativa considerando o grau de complexidade dos assuntos. Por isso, iniciou-se com casos particulares até se chegar à definição geral de Limite.

No Quadro 10 apresentamos o modelo adotado para o enfoque quantitativo.

Quadro 10

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO PARA ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA ESPL</th></tr>
<tr><td colspan="2">Variável Independente (X)

Orientação do sistema de quatro ações da ESPL e pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa</td><td colspan="2">Variável Dependente (Y)

Desempenho na resolução de problemas através do sistema de quatro ações da estratégia de Situações problemas em Limite e aprendizagem significativa do conceito de limite</td></tr>
<tr><td colspan="4">Para designar o resultado quantitativo de cada dimensão (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) será utilizado uma escala de 1 até 5 pontos, de acordo com os seguintes indicadores:

• Se todos os indicadores estão incorretos obterá a qualificação de um (1).
• Se o indicador essencial está incorreto ou parcialmente correto e/ou existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de dois (2).
• Se o estudante tem somente correto o indicador essencial obterá a qualificação de três (3).
• Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de quatro (4).
• Se todos os indicadores estão corretos obterá a qualificação de cinco (5).</td></tr>
<tr><td>DIMENSÃO</td><td>CATEGORIAS</td><td>OPERAÇÕES</td><td>INDICADOR ESSENCIAL (IE)</td></tr>
<tr><td>Y_1</td><td>• Compreender o problema</td><td>a) Ler o problema e extrair os elementos desconhecidos
b) Estudar e compreender os elementos desconhecidos
c) Determinar os dados e condições
d) Determinar o objetivo do problema d</td><td>D</td></tr>
<tr><td>Y_2</td><td>• Construir o modelo matemático</td><td>a) Determinar as variáveis e/ou incógnitas.
b) Nomear as variáveis e/ou incógnitas com suas unidades de medida.
c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e condições.</td><td>C</td></tr>
</table>

		d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo.	
Y_3	• Solucionar o modelo matemático	a) Selecionar os métodos matemáticos para solucionar o modelo b) Relacionar os itens necessários do método matemático para solucionar o modelo. c) **Solucionar o modelo matemático**.	**C**
Y_4	• Interpretar o resultado da solução encontrada	a) Interpretar o resultado obtido na solução do problema. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o objetivo do problema. c) **Dar resposta aos objetivos do problema** d) Realizar um relatório baseado no objetivo do problema. e) Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta com os objetivos do problema a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução.	**C**

A partir do desenho misto utilizado nesta pesquisa, obteve-se a comparação dos indicadores da variável “Y”, ou seja, o desempenho na resolução de problema através do sistema de quatro ações da ESPL com as análises qualitativas referentes ao processo cognitivo dos estudantes. Temos ciência da complexidade deste processo interativo, mas, esperamos por meio desta junção estudar com maior profundidade as representações mentais apresentadas pelos estudantes mediante as respostas obtidas com base nos resultados dos testes aplicados e apresentadas em uma tabela composta da descrição das provas de lápis e papel correspondente a cada fase da pesquisa.

Observamos o grupo de estudantes em vários momentos, desde as aulas expositivas como também nas aplicações do pré-teste, atividades práticas e pós-teste. Para a análise dos problemas escolhidos utilizamos o sistema de quatro ações como modelo de análise, pelo qual será permitido qualificar e quantificar a dimensão da aprendizagem dos estudantes.

4.5.2 O Enfoque Qualitativo

Através deste enfoque procura-se é obter informações sobre os estudantes no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, no contexto de sala de aula do ensino superior e, mediante análise descritiva apresentar o resultado de nossa pesquisa. Sobre este enfoque Sampieri afirma que

> Os dados qualitativos consistem, geralmente, na descrição profunda e completa (o mais possível) de eventos, situações, imagens, interações, percepções, experiências, atitudes, crenças, emoções, pensamentos e comportamento particulares das pessoas, seja de forma individual, seja em grupo ou coletivo. Coleta-se com a finalidade de analisá-los para compreendê-los e assim responder a questões de pesquisa ou gerar conhecimento (SAMPIERI, 2006, p.377).

No Quadro 11 apresentamos um modelo para o estudo qualitativo através das categorias para a análise do desempenho dos estudantes na resolução de problemas, mediante a estratégia do sistema de quatro ações da ESPL (em equivalência com os parâmetros utilizados para a análise quantitativa).

Quadro 11

<table>
<tr><th colspan="2">MODELO PARA ANÁLISE QUALITATIVA</th></tr>
<tr><th>CATEGORIAS</th><th>TEMA</th></tr>
<tr><td>• Compreender o problema
• Construir o modelo
• Solucionar o modelo
• Interpretar a solução.</td><td>• Desempenho na resolução de problema no contexto de limites de uma função de uma variável real.</td></tr>
<tr><td>• Outras categorias encontradas a partir da análise dos dados.</td><td>• Meios pedagógicos da aprendizagem significativa: organizadores antecipatórios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora.</td></tr>
<tr><th colspan="2">INDICADORES PARA CONCEITUAR O DESEMPENHO DOS ESTUDANTES</th></tr>
<tr><td>• Se todos os indicadores estão incorretos. O estudante não compreendeu, não conseguiu construir o modelo matemático e não soube solucionar o problema.</td><td rowspan="2">• Insuficiente (I) equivale a 1 – 2 (um e dois)</td></tr>
<tr><td>• Se o indicador essencial está parcialmente correto. Se o estudante apenas esboçou alguma análise do problema, elaborou algum cálculo, mas não conseguiu efetivar nenhuma ação.</td></tr>
<tr><td>• Se o estudante tem somente correto o indicador essencial. O estudante compreende o problema, atende ao</td><td>• Regular (R) equivale a 3 (três)</td></tr>
</table>

objetivo do problema, mas não executa as outras ações solicitadas e/ou executa as outras ações de forma inadequada e incompleta.	
• Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto. Se o estudante executa as principais ações de forma a atender ao objetivo do problema, mas alguma das ações foi executada de forma inadequada e incompleta.	• Bom equivale a 4 (quatro)
• Se todos os indicadores estão corretos. Se todas as ações correspondem ao solicitado pelo problema.	• Ótimo equivale a 5 (cinco)

Os principais dados para análise qualitativa foram selecionados das avaliações ocorridas durante o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite.

4.6 A Coleta de Dados e Instrumentos

Para a coleta de dados utilizou-se dos seguintes instrumentos tais como: observação sistemática, filmagem das aulas, entrevistas informais e provas de lápis e papel. Os dados foram obtidos de uma mesma e única amostra, uma sala de aula que iniciou as atividades acadêmicas com 11 (onze) estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR.

A partir da observação direta e sistemática tendo como foco principal a prática docente da professora, ou seja, o ensino ministrado do conteúdo de limite, bem como o desempenho dos estudantes nas fases avaliativas (diagnóstica, formativa e final) com um olhar baseado na aprendizagem significativa e outro, no sistema de quatro ações da atividade de situações problema em Limite, iniciou-se o processo de coleta de dados para esta pesquisa.

Os dados foram coletados em sala de aula no IFRR. As aulas foram ministradas duas vezes na semana, nos dias de segunda-feira e quinta-feira (2h cada) e, algumas vezes, de acordo com o calendário da instituição aos sábados (4h), no período de 11.03 a 20.04.2013 perfazendo um total de trinta horas (30h).

Convém esclarecer que antes de adentrarmos em sala de aula fizemos algumas reuniões com a professora da disciplina e conhecemos o ambiente físico do

IFRR. Inicialmente frequentamos informalmente a sala de aula. O fato de ser professora de matemática favoreceu bastante o entrosamento com a turma e facilitou a aceitação para participação da pesquisa.

Antes, durante e após a pesquisa fizemos várias reuniões para definição de como seriam colhidos e registrados os dados, ou seja, a seleção das unidades de análise. Inicialmente definimos que iriamos focar somente na aprendizagem dos estudantes, mas logo percebemos que este não poderia ser o único foco e, por isso também passamos a observar a prática pedagógica e o comportamento dos estudantes com relação a essa prática e à metodologia apresentada. Desse modo, obtivemos dois tipos de dados: os dados coletados referentes à prática docente e os dados obtidos do teste diagnóstico, dos exercícios e provas de lápis e papel (avalição diagnóstica, formativa e final). Estes dados foram registrados em cadernos, computador portátil e filmadora, depois transformados em relatos sistematizados.

A elaboração dos instrumentos de investigação em uma pesquisa, segundo Marconi & Lakatos (1982, p. 28) não é fácil, necessita de tempo, mas é uma etapa importante no planejamento da pesquisa.

Para Sampieri (2006, p.286) nos estudos qualitativos o procedimento usual é aplicar um instrumento ou método de coleta de dados cuja essência também seja qualitativa, porém neste mesmo instrumento poderia também dispor de algum elemento quantitativo.

Os instrumentos que usamos em nossa pesquisa foram: a observação direta, as provas de lápis e papel, entrevistas informais e filmagens das aulas. Estes instrumentos foram aplicados de acordo com as etapas da assimilação superordenada combinando com as avaliações: diagnóstica, formativa e final, conforme Quadro 12.

Quadro 12

INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS **Aplicados às Etapas da Aprendizagem Superordenada**					
Avaliação diagnóstica	**Avaliação formativa**				**Avaliação final**
E_1 Nível de partida.	E_2 Aquisição do significado da	E_3 Retenção Inicial.	E_4 Esquecimento da nova ideia.	E_5 Diferenciação adicional da	E_6 Retenção posterior.

	ideia nova.			nova ideia.	
Prova de lápis e papel Observação Filmagem	Observação Prova de lápis e papel Filmagem	Observação Prova de lápis e papel Filmagem	Observação Prova de lápis e papel Filmagem	Observação Prova de lápis e papel Filmagem Entrevista.	Observação Prova de lápis e papel Filmagem
Objetivo: Obter informação sobre o conhecimento prévio dos estudantes.	Objetivo: Conhecer e analisar o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes no conteúdo de limite a partir do sistema de quatro ações da ESPM e dos pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa.			Objetivo: Conhecer e analisar a respeito da aprendizagem dos estudantes a partir do sistema de quatro ações da ESPM e da aprendizagem significativa.	

As análises das respostas dos problemas escolhidos (das provas escritas) foram realizadas a partir do sistema de quatro ações, com suas categorias, subcategorias e os indicadores essenciais. Primeiramente foi feita uma análise qualitativa descritiva e, posteriormente foi feita uma avaliação quantitativa através dos pontos atribuídos à variável Y (aprendizagem) de 1 a 5, da percepção dos fatores que influenciaram a aprendizagem e para determinar o valor quantitativo dos indicadores alcançados. Os dados dos resultados obtidos através dos problemas resolvidos por cada estudante foram registrados na seção 5 de Resultados e Discussões, nas fases avaliativas diagnóstica, formativa e final.

Usamos as provas de lápis e papel como principal instrumento para a coleta dos dados a serem analisados. Segundo Libâneo (1990), apud Mendonza (2009) os instrumentos mais comuns ou de caráter formal de verificação escolar, são as provas escritas que têm um caráter menos formal, porém, de grande valor na compreensão da aprendizagem real dos estudantes.

A seguir apresentamos os instrumentos utilizados na pesquisa.

4.6.1 Observação

A observação direta é considerada próxima à observação participativa, pois está centrada em notas de campos, relatórios, provas de lápis e papel, tem sido essencial na investigação realizada, porque se adéqua ao âmbito de conhecimento, evitando o reducionismo e a contextualização inadequada. (MENDOZA, 2009).

Segundo Oliveira (2005, p.31) a observação é a base da investigação científica, permitindo o registro dos fenômenos da realidade, para se planejarem e sistematizarem os dados que serão coletados.

Marconi (2000) vem completar este pensamento quando diz que a observação torna-se científica à medida que: a) convém a um plano de pesquisa bem formulado; b) é planejada sistematicamente; c) é registrada metodicamente e está relacionada a proposições mais gerais, em vez de ser apresentada como uma série de coisas interessantes; d) está sujeita a verificações e controle sobre a validade e segurança.

A observação foi realizada com o intuído de obter os dados descritivos sobre o contexto da sala de aula, da prática docente e da aprendizagem dos estudantes, fazendo uso de um relatório descritivo e de filmagens das aulas.

Os registros dos dados coletados das provas escritas em todas as fases avaliativas foram transformados em relatos sistematizados e se encontram nos Apêndices D, E e F. Os registros das ocorrências das aulas encontram-se no Apêndice A.

A intenção fundamental do uso da observação do processo de ensino e aprendizagem dos estudantes em sala de aula do ensino superior é obter indícios de como os estudantes aprendem e, se a aplicação da estratégia do sistema de quatro ações da ESPL concomitante com uma teoria da aprendizagem promove a aprendizagem significativa. Para isso foram usadas, fundamentalmente provas de lápis e papel, que nos permitiram a percepção sobre o processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, foi utilizado um guia de observação em cada uma das atividades executadas, para suporte do processo de assimilação, que será utilizada mediante um sistema de indicadores prévios com base nas hipóteses formuladas que nos permitirá a comprovação atenta dos fenômenos, através da aproximação do investigador a determinados extratos do processo investigativo.

Além dos órgãos dos sentidos usados para a obtenção de determinados aspectos da realidade, utilizamos, computadores, filmadoras e máquinas fotográficas, para que pudéssemos examinar melhor os acontecimentos que envolviam estudantes e professores em sala de aula.

A observação permitiu-me perceber o comportamento dos estudantes, e à medida que eles foram se adaptando à presença das pesquisadoras e da filmadora, pois com o tempo nem se importavam mais com a nossa presença e agiam naturalmente. Desse modo, perceberam-se algumas situações em que alguns estudantes mostraram que não estavam preocupados com o horário de chegada em sala de aula. Geralmente as aulas iniciavam com menos de 50% dos estudantes participantes, mas a professora iniciava pontualmente mesmo tendo apenas dois estudantes. Percebemos que apesar da falta de pontualidade e assiduidade pelo menos 40% dos estudantes participava assiduamente e se interessava pelas aulas, mostrando compreender o conteúdo exposto pela professora. Já os outros restantes, não tinham participação assídua e mostravam dificuldade de entendimento na assimilação do conteúdo, principalmente na resolução de problemas. Isto ficou comprovado pela análise qualitativa e quantitativa das atividades de situações problemas, aplicadas no curso do desenvolvimento da unidade de limite.

Apresentamos no Quadro 13 trechos de observações de uma aula conforme foi observado e registrado na forma escrita.

Quadro 13 – Relato de observação de aula do conteúdo de limite

Aula: 03 – Data: 18/03/2013 - Assunto: Funções (apresentação do organizador antecipatório) Ocorrência em sala de aula: Ao serem motivados pela professora da disciplina para opinar sobre o grau de dificuldade da atividade (pré-teste) os estudantes responderam: "não foi fácil resolver"; "resolvi quase todos, faltou somente a última questão"; "não consegui", "não consegui lembrar". Dando prosseguimento a professora fez a demonstração da resolução do problema 1. A professora comentou sobre a importância da linguagem matemática ao realizarem a análise inicial para resolução de um problema, ou seja, a identificação dos dados do problema. O motivo desta fala foi para chamar a atenção na forma de justificar a solução de um problema ou de efetuar um cálculo, para não haver dúvidas no momento da correção das respostas dadas. "Na determinação dos dados, o que demonstra que determinada função está crescendo?" Perguntou a professora. Resposta: "o sinal de subtração (-)". ..."e em quanto tempo a produção vai se esgotar? Continuou perguntando a professora. Resposta: "8 anos, conforme os dados da função". A professora prosseguiu com os questionamentos sobre que tipo de função era abordado no problema. Resposta obtida: "função linear decrescente". Problema 2: a professora questionou: "como vocês percebem o comportamento da função neste problema?" Para responder esta questão os estudantes chegaram ao consenso de que primeiramente deveria se encontrar a equação da reta, ou seja, o modelo matemático $y – y_0 = m(x - x_0)$ usando o determinante e, posteriormente fazer a substituição de p e q na equação. Observação: sem conseguir encontrar a equação da reta um dos estudantes afirmou não ter finalizado a resolução deste problema. A pós apresentar o Problema 3: A professora perguntou: "quem conseguiu resolver este problema?", dois estudantes responderam: "não respondi essa"; "resolvi todos" e os demais permaneceram calados. Observação: um Estudante questionou sobre encontrar a solução do problema usando a regra de três. Resposta da professora: "encontrar o resultado sim, porém este seria um mecanismo para resolver um problema em particular". Os demais seriam resolvidos de forma linear.

A professora entregou aos estudantes mais uma relação de atividades contendo 4 (quatro) problemas para serem resolvidos em sala de aula aplicando a estratégia da ESPM. De repente surge uma pergunta “Qual o objetivo da disciplina de Cálculo?” foi uma das alunas que perguntou, mas não foi possível captar a resposta da professora [...] , mas deu pra perceber que a aluna pareceu satisfeita com a resposta. Iniciando a segunda lista de atividades: a professora perguntou, “qual é o modelo matemático da situação problema 1?” ... “E quais são os dados do problema?”. Os estudantes responderam: “Cidade A [Iluminação = R$ 4,00 e 0,40 Kwh]” e “Cidade B [Iluminação = R$ 4,00 e 0,40Kwh]”. Os estudantes apresentaram ter compreendido que para encontrar a solução do problema era necessário aplicar os dados do problema na equação. Posteriormente, a professora perguntou se havia possiblidade de identificar se a Cidade A e Cidade B, ou seja, se as duas cidades chegariam ao mesmo consumo. Os estudantes responderam que sim, pois se poderia igualar as equações e obter o resultado do valor de x. Desse modo o problema foi solucionado, com a participação da professora estimulando os estudantes para participarem e resolverem o problema.

O segundo problema da lista envolveu o conteúdo de área da figura geométrica. Neste problema a professora ressaltou que a área é a função da dimensão, ou seja, existe uma relação de dependência. Neste exemplo os estudantes ficaram atentos sem realizar nenhum questionamento, faziam gestos de confirmação com a cabeça. Chegaram à conclusão do problema concordando com a professora que se tratava de um eixo de simetria que corta uma parábola ao meio. No terceiro problema: o assunto abordado foi o envolvimento de potência. A professora enfatizou a construção do modelo matemático a partir de situações problema para poder generalizar a ideia e possibilitar a aplicação em outras situações. Observação: houve um questionamento de uma aluna que interpretou o problema de maneira rápida e, desse modo encontrou a solução usando apenas cálculo mental. Quanto a este questionamento, a professora interferiu informando que a principal ideia para a solução não seria simplesmente encontrar a resposta do problema, mas construir um modelo matemático. Outro Estudante afirmou que este problema pode ser resolvido do jeito que se calcula juros compostos.

Ao termino da aula a professora deu um aviso aos estudantes: “revisar o conteúdo de funções de primeiro grau, segundo grau e logarítmica”. Os estudantes ficaram surpresos, mas não questionaram e realizaram a atividade no tempo de aula previsto.

4.6.2 Filmagens das aulas (vídeos)

Os vídeos consistem em fenômenos complexos de análise, mas auxiliam na percepção da realidade não percebida pelos órgãos dos sentidos que são limitados na ação de observar um fenômeno, principalmente uma sala de aula com vários estudantes. Desse modo, mostra-se um instrumento muito útil para a pesquisa. Entretanto, se não for bem utilizado em sala de aula não servirá completamente ao o objetivo proposto, pois o instrumento de filmagem deve estar bem posicionado, ter uma boa capacidade de registrar imagens e som para serem usados posteriormente e, deve ser manuseado por uma pessoa capacitada.

Inicialmente começamos com um equipamento que não era muito bom, pois ao rever as filmagens percebemos problemas no som, não conseguimos ouvir o que os alunos falavam, mas tão logo isto foi percebido trocamos de equipamento para um de melhor qualidade. Outro fator importante que só mais tarde percebemos, diz respeito à questão do posicionamento da filmadora, que apesar de termos escolhido uma posição estratégica para a filmadora que ficava num tripé, observamos que em determinadas situações teria sido melhor pegar a filmadora e ir até os estudantes para captar melhor suas falas e expressões corporais. Percebemos que algumas filmagens não ficaram boas, e a informação que poderia ter sido aproveitada como fonte de dados ficou comprometida, talvez pelo amadorismo e pouca experiência no uso com este tipo de instrumento. Contudo, aproveitamos mais de 60% do conteúdo filmado.

Apresentamos no Quadro 14 um recorte da primeira aula realizado através de filmagem, se iniciou com comentários a respeito do teste diagnóstico, onde os estudantes tiveram a oportunidade de expor suas dúvidas e também responder aos questionamentos desta fase analisada.

Quadro 14 – Transcrição de vídeo (filmagem da aula após o pré-teste)

Aula (02) Objetivo: corrigir o pré-teste recordando o assunto de funções	Professora: *O que vocês acharam do teste?* Comentário dos estudantes sobre o seu próprio desempenho na resolução do pré-teste: R1: *não foi fácil resolver*; R2: *resolvi quase todos, faltou somente a última questão*; R3: *não consegui*.
Abordagem teórica: método da ESPL (estímulo à linguagem verbal).	Comentário da Professora (introdução da ESPL): *A linguagem é importante ao realizar a análise inicial para a resolução de um problema, é através da linguagem, que se identifica o objetivo e os dados do problema.*
Procedimentos: demonstração da resolução do problema com base na ESPL	*A forma de justificar a resolução de um cálculo, para que o corretor (quem corrige) possa ser convencido pelas respostas dadas é o argumento descritivo em linguagem matemática tanto na forma algébrica quanto na forma descritiva das ações.*
Questionamentos sobre o problema (P-01) com base nas	Professora: *O que demonstra que determinada função está crescendo?*

ações: 1 e 4, “compreender o problema” e “Interpretar a Solução” Questionamentos sobre o problema (P-02) resolução com base nas ações: 2 e 3 “Construir o modelo” e “Solucionar o modelo” Questionamentos sobre o primeiro problema (P-03) resolução com base nas ações: 1 e 3, “Compreender” e “Interpretar a solução” Questionamentos dos estudantes: **Legenda**: R1 – resposta 1, e assim sucessivamente; Q1 – questão 1, e assim sucessivamente.	R1: *o sinal de subtração (-).* Professora: Qual o período que a produção da fábrica irá ser esgotada? R1: *8 anos, conforme os dados da função*. Professora: *Que tipo de função de função é abordado no problema?* Três estudantes responderam ao mesmo tempo: *função linear decrescente.* Professora: *Qual o comportamento da função de abordagem no problema?* [...] Os estudantes ficaram em silêncio, mas logo em seguida: R1: *tem que encontrar a equação da reta*. Os demais concordaram: *Sim, primeiro tem que encontrar a equação da reta para saber [...].* R2: *há, por isso eu não consegui responder [...],* um dos estudantes afirmou. Professora: *quais de vocês responderam esse problema?* R1: *não respondi essa*; R2: *resolvi todos*; Os demais ficaram em silêncio. Q1: *eu encontrei a resposta usando o método da regra de três.* Q2: *eu também posso resolver usando o mesmo método pra juros compostos.* Professora: *encontrar o resultado, sim! Porém este seria um mecanismo para resolver um problema em particular. Os demais seriam resolvidos de forma linear, precisamos de um modelo.*

Observa-se que apenas três estudantes interagiram respondendo corretamente ou de forma incompleta aos questionamentos feitos pela professora, enquanto que os demais estavam atentos às explicações, mas sem fazer comentários ou questionamentos, talvez tentando relacionar na sua estrutura cognitiva ações para compreensão.

A seguir, no Quadro 15 apresentamos uma transcrição da filmagem realizada numa aula cujo tema abordado foi definição precisa de limite. Observamos que os estudantes ficaram apreensivos, olhavam atentamente para a professora e pareciam fazer esforço em compreender o que ela estava expondo. Os estudantes mostraram interesse em ouvir a exposição verbal da professora.

Quadro 15 – Transcrição de vídeo – Aula sobre a Definição Formal de Limite

Diálogo da professora e dos estudantes	**Ações e tempo do vídeo**
A demonstração da definição precisa de limite: 01:25” P: *iremos apresentar agora uma forma mais precisa para encontrar os limites, pois as formas anteriormente trabalhadas são inadequadas para solucionar problemas de maneira geral do conteúdo de limite*. P: *como calcular o limite de uma função de maneira mais precisa?* A professora argumentou sobre a maneira de calcular precisamente o limite de uma função sem o apoio dos modelos das tabelas para visualizar a aproximação dos valores A demonstração gráfica da função: 02:55” P: A *aproximação máxima dos valores de x ao ponto, apresenta uma diferença mínima, tanto pela direita quando pela esquerda, mas essa diferença é tão pequenos que apenas com os números não seria possível representar o valor mais próximo, logo, apresenta-se os conceitos delta e épsilon*. Questionamentos: P: *qual o objetivo desse problema?*	Passados 02:06” Os estudantes permaneceram atentos[...] sem esboçar questionamento. Passados 02:47’’ quatro estudantes permaneceram atentos[...] ainda sem esboçar questionamentos, dois acompanhavam e anotavam no caderno, desses dois estudantes dialogavam entre si, provavelmente quanto a exposição da professora, e apenas um deles estava desatento a aula. Passados 08:39” os estudantes permaneceram atentos[...] ainda sem esboçar questionamentos, mas pararam de fazer anotações, e quando ouviram o termo delta e épsilon demonstraram atenção mais aguçada. E apenas um deles estava desatento à aula. 10:40” os estudantes não responderam ao questionamento, da professora, demonstraram no momento uma expressão facial pensativa. Um dos estudantes fez menção de resposta, mas desistiu. **Legenda**: P: professora **Aula**: 18/04/2013

4.6.3 Entrevista

Coma ideia de não somente obter informação para rechear a pesquisa, mas sim com o objetivo de enriquecer e aprofundar o conhecimento para dar sustentação à descrição do objeto de estudo. Utilizaremos a entrevista como um instrumento de exploração e diálogo entre o entrevistador e o entrevistado com o objetivo de obter informações relevantes para a nossa pesquisa.

Escolhemos o modelo de entrevista informal para usarmos com a professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A entrevista informal realizou-se nos momentos finais da unidade de limite conforme Quadro 16.

Quadro 16 – Entrevista com a professora de disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I

ENTREVISTA COM A PROFESSORA DA DISCIPLINA DE CÁLCULO 1
DATA: 20.04.2013 LOCAL: IFRR ENTREVISTADO: Professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I ENTREVISTADOR: esta pesquisadora TEMA: Aplicação da teoria da aprendizagem significativa e da metodologia de resolução de problema através da ESPM.
CONTEUDO: 1- **Pesquisadora**: **Professora, você percebeu alguma mudança na prática docente após o estudo da aprendizagem significativa?** **Resposta da professora**: Posso dizer que houve mudança na minha prática pedagógica após a intervenção, no sentido de dar mais atenção a forma como ocorre a aprendizagem, hoje para mim o ensino está muito mais vinculado a aprendizagem do que antes. 2- **Pesquisadora: Como foi ter que aplicar a aprendizagem significativa nas aulas?** **Resposta da professora**: Realizar a pesquisa e ao mesmo ser docente da disciplina, foi um desafio muito grande, eu tinha que ter os dois olhares, o de professora e de pesquisadora, entretanto, foi muito enriquecedor, pois houve muito cuidado com a organização do ensino e um olhar atento à aprendizagem dos estudantes. Não houve apenas a preocupação em passar os conteúdos e sim em verificar a forma como esses estudantes estavam internalizando esses conteúdos. **3- Pesquisadora: Após realizar o pré-teste você preparou os organizadores prévios?**

Quais temas foram abordados?

Resposta da professora: Como cita Ausubel, "Organizadores Prévios servem de âncora para nova aprendizagem". Penso que os organizadores prévios que utilizamos no caso do estudo de limite, foram alguns problemas apresentados em um nível maior de abstração. Esses problemas eram sempre trabalhados em um nível mais geral, como material introdutório, antes de chegar aos conceitos que iriam ser estudados.

4- **Pesquisadora: Quais outros meios pedagógicos da aprendizagem significativa você usou para elaborar e aplicar nas aulas.**

Resposta da professora: Foram utilizados recursos da tecnologia para motivar e auxiliar os estudantes nos cálculos e construção de gráficos, além de aulas com o auxílio de recursos visuais para proporcionar aos estudantes maior compreensão dos conteúdos. Outra preocupação que houve também foi na forma de organização do ensino, quando optou-se por trabalhar os conceitos a partir de atividades de situações problemas, partindo de situações reais, quase sempre adequando as aulas ao tipo de aprendizagem subordinada.

5- **Pesquisadora: Fale sobre sua conclusão da aplicação da aprendizagem significativa em limite.**

Resposta da professora: Acredito que a forma como foram desenvolvidas as aulas proporcionou aprendizagem aos estudantes, tendo em vista que houve bom rendimento na disciplina "Cálculo I", e principalmente porque após um determinado tempo, ou seja, transcorrido todo o semestre, no início do período seguinte, ao ser feito uma avaliação diagnóstica para iniciar a disciplina "Cálculo II" os estudantes ainda mantinham as ideias mais gerais do conceito de limite na sua estrutura cognitiva.

4.6.4 Provas de Lápis e Papel

A prova de lápis e papel encontra-se dentro das técnicas formais avaliativas e foi usada neste trabalho de pesquisa como avaliação de desempenho nas atividades de situações problemas envolvendo limite.

As provas de lápis e papel foram elaboradas pela professora da disciplina, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa, porém a análise foi feita com base nos parâmetros qualitativos da ESPM, e a correção quantitativa para efeito de aprovação foi feita pela professora da disciplina usando os parâmetros quantitativos estabelecidos pela instituição.

As provas de lápis e papel são utilizadas nesta pesquisa para nos permitir conhecer o desempenho do estudante em sua aprendizagem do conceito de limite, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, através de descrição minuciosa a partir dos critérios essenciais do sistema de quatro ações da atividade de situações problema.

As aplicações das provas de lápis e papel foram realizadas em três fases de observação: Avaliação diagnóstica (pré-teste), processo de desenvolvimento da avaliação formativa (pós-teste) e Avaliação final (teste final do conteúdo de limite).

A seguir apresentamos os três problemas (P-01, P-02 e P-03) selecionados do pré-teste, para o estudo do desempenho de cada estudante na resolução de problemas.

A escolha do Problema 1 (P-01) teve por objetivo identificar os conhecimentos prévios do conceito de função, do cálculo algébrico, bem como a compreensão literal do problema proposto e o uso da linguagem matemática pelos estudantes.

Problema (P-01): Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz por ano um determinado número de unidades de um artigo; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função $f(x) = 8000 - 1000x$ representa os dados da tabela abaixo:

x (anos)	1	2	3
y (prod.)	7000	6000	5000

Responder:

a) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.

b) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.

c) Represente graficamente a função f(x).

Os parâmetros descritores no (Quadro 17) cumprem o objetivo de servir de suporte para a análise da resolução do problema 1: “realizar o prognóstico e identificar o tempo que a produção pode parar”. Reporta-se a descrever o entendimento conceitual sobre função a fim e a equação da reta, que os estudantes demonstraram em suas respostas. Portanto, serão observados os aspectos fundamentais sobre a aplicação dos conceitos matemáticos no contexto do assunto de funções imprescindíveis para o estudo de limite:

Quadro 17

PARÂMETROS CONCEITUAIS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 1	
CATEGORIA	OPERAÇÕES
Compreender o modelo da função decrescente	*Ler e extrair os elementos desconhecidos:* a) determinar o prognóstico para 2 anos; b) determinar o tempo em que a produção pode parar; e c) esboçar na forma gráfica. *Os dados do problema*: estão informados na tabela do problema. *As condições*: a produção que determina o quantitativo de artigos e a diminuição da produção.
Identificar o modelo da função dado no problema	*Determinar e nominar as variáveis e incógnitas*: as variáveis já foram determinadas no problema, porém o estudante deve identificar que x faz relação com os anos, y com a produção e, $f(x) = 8000 - 1000x$ o modelo da função afim deverá ser representado da seguinte forma: $f(x) = -x + b$. *Solucionar o modelo*: calcular o prognóstico de $f(4)$ e $f(5)$ para encontrar a resposta da produção nos próximos dois anos; encontrar o valor de x para $f(x) = 0$; elaborar o gráfico com base às coordenadas (x, y), respectivamente, anos e produção.
Solucionar o modelo da função dado no problema	*Método para solucionar*: função afim. *Solucionar o modelo*: calcular o prognóstico de $f(4)$ e $f(5)$ para encontrar a resposta da produção nos próximos dois anos; encontrar o valor de x para $f(x) = 0$; elaborar o gráfico da função, sendo uma reta não vertical com base nas coordenadas (x, y), respectivamente, anos e produção.
Interpretar a solução do modelo da função dado no problema	*Resposta ao objetivo do problema*: determinar o prognóstico dos próximos dois anos, isto é, $f(4)$ e $f(5)$; a produção vai parar em $f(x) = 0$; o gráfico é decrescente, construído nas coordenadas: (1, 7000); (2, 6000); (3, 5000); (4, 4000); (5, 3000); (6, 2000); (7, 1000) e (8, 0); *Relatório discursivo*: descrever sobre o procedimento de aplicação do modelo, representação gráfica do comportamento da função.

A escolha do Problema 2 (P-02) para a análise da aprendizagem tem por objetivo obter dados sobre o conhecimento prévio do estudante a respeito de função, num grau de complexidade um pouco maior que do primeiro problema, pois agora o estudante deve aplicar o modelo matemático da função para determinar o valor da poupança e consequentemente o salário do empregado.

<u>Problema (P-02)</u>: O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sendo que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

a) Encontre um modelo matemático que defina a poupança P em função de seu salário x;
b) Para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal?
c) Justifique suas respostas.

Pretende-se identificar, por meio do desenvolvimento do cálculo e das descrições se o estudante possui habilidades para elaborar o modelo aplicando as regras básicas de funções, bem como se ao interpretar a solução demonstra ter conhecimento do conceito matemático requerido no problema. A seguir, apresentamos as categorias e os parâmetros conceituais para análise do problema 2 do pré-teste.

Quadro 18

PARÂMETROS CONCEITUAIS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 2	
CATEGORIA	**OPERAÇÕES**
Compreender a aplicação do conceito de função de uma variável	• *Ler e extrair os elementos desconhecidos:* a) identificar o termo relativo ao salário, x= salário; b) identificar o valor do aluguel R$ 120,00 e c) identificar o valor que poupa, atribuindo um símbolo do alfabeto, por exemplo, P = poupança. • *Os dados do problema*: extrair os termos descritivos e algébricos como: x(salário); R$ 120,00 (valor do aluguel); P(poupança). • *As condições*: relacionar os elementos para encontrar um modelo para determinar a poupança e consequentemente o salário do empregado.
Construir o modelo da função	• *Determinar e nomear as variáveis e incógnitas*: destacar as variáveis x =?; R$ 120,00 (valor do aluguel); P(x)=?. • *Construir o modelo*: construir o modelo, aplicando o conceito de função afim $P(x) = \frac{x}{4} - 120$.
Solucionar o modelo da função	• *Método para solucionar*: conceito da função afim. • *Solucionar o modelo*: aplicar os dados do problema na função modelo, substituindo P(x) por R$ 240,00, ou seja, P(x) = 240, resolver e encontrar o valor do salário do empregado.
Interpretar a solução do modelo da função	• *Resposta ao objetivo do problema*: determinar o modelo da função Poupança e o salário do empregado. • *Relatório discursivo*: o relatório descritivo deve expor as ideias aplicadas pelo estudante, referenciando os conceitos matemáticos ou em termos intuitivos os modos de compreensão.

O Problema 3 (P-03), do mesmo modo que os dois anteriores requer o uso de conceitos mais abrangentes de função. O nível de complexidade também aumentou, com o conceito de função real de uma variável real e o tipo particular que é a função afim, envolvendo a variação de duas grandezas, aplicadas à situação problema. Com os dados dispostos no problema, o estudante deverá elaborar o modelo matemático da solução, fazendo uso dos dados: conceitos algébricos; dados descritivos e modelo geométrico (gráfico da curva de uma função real interceptada por uma reta de uma função afim).

Não somente no aspecto analítico, este problema implica o uso do coeficiente angular representado pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, ou seja, um artifício responsável para encontrar a inclinação da reta, que recebe também o nome de taxa de variação da grandeza y e da grandeza x. A diferença de nomenclatura, *coeficiente angular* nas equações da reta e *taxa de variação* nas funções afins, é somente uma forma de interpretação que se pretende em cada caso.

Pretende-se identificar através do resultado deste problema se o estudante possui habilidade para elaborar o modelo neste nível, usando a combinação de duas funções que representam uma reta e uma curva e, também se é capaz de interpretar a solução usando termos algébricos e descrições elaboradas com termos matemáticos e, além disso, observar se possui habilidade para analisar, mesmo que de forma intuitiva, o gráfico da função.

Problema 3 (P-03): Duas plantas da mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas, desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pelo modelo matemático $y = \frac{24x - x^2}{12}$..

Um esboço desse gráfico está apresentado na figura 5.

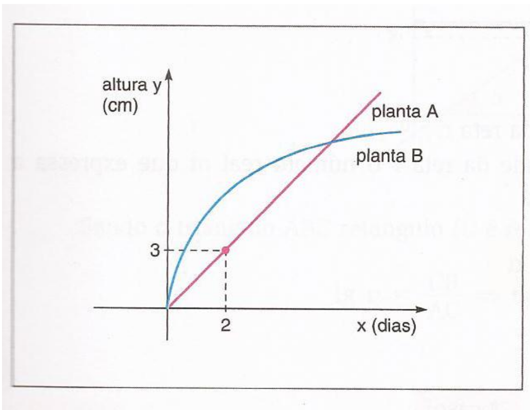


Figura 5.

Responda:

a) Qual o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura?

b) Explique a sua resposta.

Os parâmetros descritores (Quadro 9) empregados nas ações para este problema, mostram que o problema 3 tem um nível de complexidade superior em relação aos primeiros problemas. Além da elaboração do modelo matemático, busca-se obter do estudante uma análise também mais complexa, portanto a interpretação da solução deste problema levará a uma melhor compreensão da aplicação do conceito de limite, por fazer uso de duas funções que se interceptam em um mesmo ponto.

Portanto, as ações irão descrever a habilidade conceitual dos estudantes com relação à aplicação de suas estratégias para elaboração do modelo matemático.

Quadro 19

PARÂMETROS CONCEITUAIS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 3	
Categoria	**Operações**
Compreender a aplicação dos conceitos de função implícitos no problema	• *Ler e extrair os elementos desconhecidos:* a) destacar o modelo da reta representada por um ponto; destacar o ponto $(2, 3)$; o período de 10 dias e a equação da Planta B. • *Os dados do problema*: extrair o ponto $P(2, 3)$, determinar outro ponto para definir a função em dois pontos, ex. P(0, 0), destacar o modelo da função da Planta A, usando modelo da equação da reta. Destacar o modelo da Planta B.
Construir o modelo da função que representa a Planta A	• *Determinar e nomear as variáveis e incógnitas*: destacar $P_1(2, 3)$ e $P_2(0, 0)$; o modelo da equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ da "Planta A", nos pontos P_1 e P_2. • *Construir o modelo*: construir o modelo da função da Planta A, substituindo os pontos na equação da reta $3 - 0 = m(2 - 0)$, para determinar a taxa de variação, ou seja, o valor de m.
Solucionar o modelo da função da Planta A em função da Planta B	• *Método para solucionar*: Coeficiente angular e equação do 2º Grau. • *Solucionar o modelo*: Determinar o coeficiente angular da equação da Planta A , sendo $m = \frac{3}{2}$, aplicar o coeficiente à equação da função afim $f(x) = ax + b$, aplicando no ponto, temos: $f(x) = \frac{3}{2}x + b$, se $b = 0$ logo, obtermos e equação da Planta A: $f(x) = \frac{3}{2}x$ ou $y = \frac{3}{2}x$. Após determinar a equação de A, substitui o valor de y na equação da Planta B, $y = \frac{24x - x^2}{12}$, para encontrar a mesma taxa de variação no ponto de intersecção. Esta combinação deverá resultar na equação do 2º grau $x^2 - 6x = 0$, onde se encontram as raízes $x' = 0$ e $x'' = 6$, o valor real de $x = 6$, corresponde ao dia, em que as plantas terão a mesma altura, que substituindo tanto na equação da Planta A, quanto na Planta B, se obtém 9cm de altura.
Interpretar a solução do modelo das funções	• *Resposta ao objetivo do problema*: determinar as respostas com relação ao dia e altura em que as plantas coincidem. • *Relatório discursivo*: o relatório deve descrever os procedimentos de aplicação dos conceitos e ao mesmo tempo demonstrar a compreensão do estudante.

Os conceitos trabalhados durante a fase formativa, a partir dos organizadores prévios foram: função linear, função afim e geometria analítica (reta secante, reta tangente, equação da reta e coeficiente angular) e, também os gráficos das funções. Além desses conhecimentos constituíram-se conteúdo avaliativo o de limite (introdução da ideia intuitiva de limite, definição de limite, leis de limite, definição precisa de limite, limites laterais, limites infinitos e continuidade).

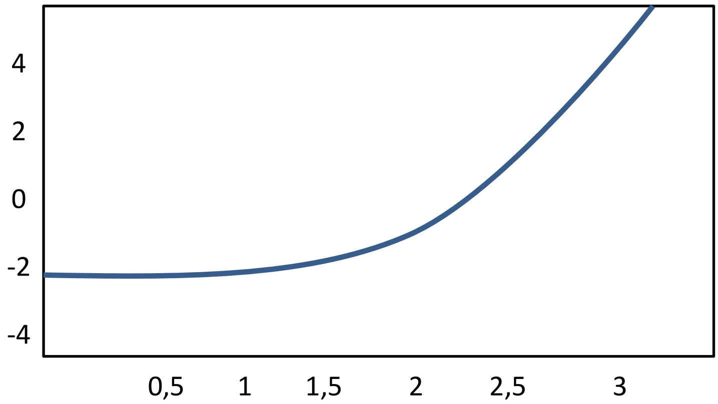
Das várias atividades aplicadas na avaliação formativa escolhemos algumas provas de lápis e papel e, destas, quatro questões para se analisar de acordo com o sistema de quatro ações da atividade de situações problema, e com os pressupostos pedagógicos da teoria da aprendizagem significativa.

Na sequência apresentamos os quatro problemas (P-04, P-05, P-06 e P-07) selecionados de um teste da avaliação formativa e, dois problemas (P-08 e P-09) selecionados do teste final do conteúdo de limite.

PROBLEMA 4 (P-04)

Este problema tem por objetivo a análise do comportamento da função, em um determinado ponto, atribuindo valores próximos a esse número para assimilar a ideia de limite por aproximação e, além disso, verificar sua prática com os diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 04: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:



a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x=2

x=2 (esquerda)	
x	f(x)

x=2 (direita)	
x	f(x)

b) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

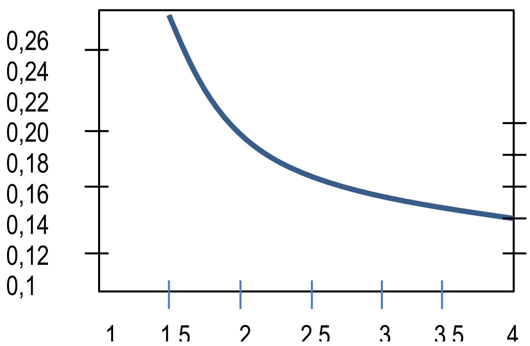
c) Explique o comportamento da função f(x) = x² + x – 6 no ponto x = 2.

PROBLEMA 5 (P-05)

O segundo problema (P-05), trata de limites laterais de uma função racional, cujo denominador contém uma equação de segundo grau incompleta. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível maior de complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição (domínio) para sua resolução. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 05:

Dada a função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)	
x	f(x)

x=1 (direita)	
x	f(x)

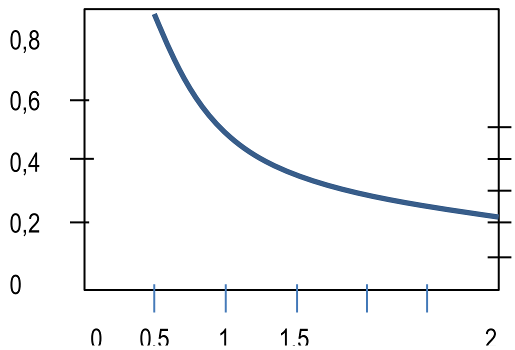
b) Represente os pontos da tabela no gráfico.
c) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ no ponto x = 3.

PROBLEMA 6 (P-06)

Este problema trata de limites laterais de uma função real, racional, em que o estudante deve aplicar os conhecimentos de resolução de equação envolvendo radiciação e equação do primeiro grau. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível de média complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição para sua resolução que é o domínio. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 06:

Dada a função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)	
x	f(x)

x=1 (direita)	
x	f(x)

b) Represente os pontos da tabela no gráfico.
c) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ no ponto x = 1.

PROBLEMA 7 (P-07)

O problema (P-07) apresenta-se com um nível de abstração maior que dos outros problemas, pois se entende que o estudante que já se familiarizou com a ideia de aproximação de um ponto através de vários exemplos e exercícios. Na sequência foram apresentadas as leis do limite, então, se espera que agora o estudante possa mostrar que já tem competência para resolver questões mais abstratas do conceito de limite. Com este problema tem-se o objetivo de analisar a compreensão do estudante do conceito de limite a partir da definição formal (abstrata) e também do seu entendimento sobre o conceito de continuidade.

PROBLEMA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$.

a) É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$?
b) Justifique sua resposta.

Apresentamos no Quadro 20 o modelo com um breve resumo dos parâmetros utilizados para a análise de cada um dos problemas selecionados de um dos testes aplicado na fase formativa.

Quadro 20

MODELO PARA ANÁLISE DOS PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO FORMATIVA			
PROBLEMAS	**OBJETIVO**	**CATEGORIAS**	**PARÂMETROS CONCEITUAIS**
P – 04	Assimilar o conceito de limites laterais aplicando em uma função quadrática.	Solucionar o modelo matemático.	Analisar a construção da tabela com os valores de x próximos de 2, tanto pela esquerda quanto pela direita e identificação dos pontos dados no gráfico da equação.
	Assimilar o conceito de limites laterais	Compreender o	Analisar se o estudante identificou o domínio da função

P – 05	mediante uma função racional.	problema. Solucionar o modelo matemático através de tabelas e gráficos.	racional, demonstrando que compreendeu o problema e sabe resolver este tipo de função, bem como se identificou os valores que indicam a aproximação por ambos os lados (direito e esquerdo) nos modelos matemáticos apresentados (tabelas e gráfico). Descrever sua compreensão do comportamento da função num determinado ponto.
P – 06	Assimilar o conceito de limites laterais mediante uma função real	Compreender o Problema. Solucionar o modelo matemático através de tabelas e gráficos.	Analisar se o estudante identificou o domínio da função racional, demonstrando que compreendeu o problema e sabe resolver este tipo de função, bem como se identificou os valores que indicam a aproximação por ambos os lados (direito e esquerdo) nos modelos matemáticos apresentados (tabelas e gráfico). Descrever sua compreensão do comportamento da função num determinado ponto.
P – 07	Assimilação da definição formal de limite.	Compreender o problema.	Verificar se o estudante entendeu o conceito de limite através da definição formal e, se é capaz de explicar o modelo matemático

No contexto de uma avaliação final apresenta-se ao estudante a oportunidade de mostrar a maturidade dos conhecimentos adquiridos de forma mais abstrata e níveis de complexidade cada vez maiores. Desse modo, os problemas foram selecionados com esta intenção.

PROBLEMA 08 (P-08)

Neste problema (P-08) destaca-se a aplicação do conceito de continuidade de funções em quatro situações a serem analisadas. Os estudantes deverão construir esboços gráficos e compor tabelas com valores aproximados do ponto indicado, no intervalo dado em cada questão e, além disso, descrever o comportamento que justifica a descontinuidade da função.

Problema 8 (P-08) - Explique que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função:

a) $f(x) = \ln|x-2|$ a = 2

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \; se \; x \neq 1 \\ 2 \; se \; x = 1 \end{cases}$ a = 1

c) $f(x) = \begin{cases} e^x \; se \; x < 0 \\ x^2 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ a = 0

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ a =1

PROBLEMA 9 (P-09)

O problema (P-09) propõe a aplicação da definição de limites infinitos na análise contextual para identificar o custo percentual de remoção de resíduos tóxicos, como objetivo do problema, com base na definição de limite. Portanto, o estudante deverá analisar o curso para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos e concluir que, quanto mais próximo de 100 forem os valores de x pela esquerda, o limite poderá crescer indefinidamente ou decrescer indefinidamente.

PROBLEMA 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0,8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

a) Calcule $\lim_{x \to 100-} S(x)$
b) Interprete o resultado obtido

O instrumento utilizado para análise dos dados coletados pelos testes (Quadro 10) dos problemas solucionados pelos estudantes foi elaborado com base nas características das ações e operações da ESPL. O indicador essencial define-se pela operação de maior relevância, para execução da ação, na qual se ancora a média da escala quantitativa para o desenvolvimento de cada ação.

Portanto, a análise do desempenho dos estudantes, destaca-se conforme os parâmetros do indicador essencial e demais indicadores não essenciais, os quais determinam os valores alcançados do desempenho nas ações, correspondente às operações realizadas na resolução dos problemas. Na composição da Tabela 6 estão representados os elementos das subcategorias das ações cujas análises foram realizadas com base nas características das ações realizadas.

Tabela 6

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DAS PROVAS DE LÁPIS E PAPEL			
CATEGORIAS	**SUBCATEGORIAS (ANÁLISE DESCRITIVA)**	**INDICADOR ESSENCIAL**	**VALOR ALCANÇADO**
Compreender o problema	a) Ler o problema e extrair os elementos desconhecidos b) Estudar e compreender os elementos desconhecidos c) Determinar os dados e condições d) **Determinar o objetivo do problema**	I, R, B ou O	1 - 5
Identificar o modelo matemático.	a) Determinar as variáveis e/ou incógnitas. b) Nomear as variáveis e/ou incógnitas com suas unidades de medida. c) **Construir o modelo matemático a partir das variáveis e condições**. d) Realizar as análises das unidades de medida do modelo.	I, R, B ou O	1 - 5
Solucionar o modelo matemático	a) Selecionar os métodos matemáticos para solucionar o modelo b) Relacionar os itens necessários do método matemático para solucionar o modelo. Solucionar o modelo matemático.	I, R, B ou O	1 - 5
Interpretar a solução	a) Interpretar o resultado obtido na solução do problema. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o objetivo do problema. c) **Dar resposta aos objetivos do problema** d) Realizar um relatório baseado no objetivo do problema. e) Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta com os objetivos do problema a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução.	I, R, B ou O	1 - 5

Os dados obtidos na Tabela de Análise (6) dos resultados dos problemas por estudante, após as análises foram sintetizados na tabela 7, considerando a ação essencial e os indicadores quantitativos de cada subcategoria, de acordo com execução das ações da ESPL e, determinados pelo desempenho quantitativo. Este modelo foi utilizado para cada fase avaliativa.

Tabela 7

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (MODELO)

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 1	!?	!?	**?**	?	Descrição da ação essencial com base nas definições e conceitos envolvidos.

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução; (!) Informação dada non problema; (?) questionamento sobre a ação; (!?) informações dadas, mas também há questionamentos sobre a ação.

Fonte: Mendoza, 2013 (adaptação).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresenta-se e discutem-se os resultados das avaliações ocorridas na unidade de Limite, durante a pesquisa, com ênfase às ações e operações da ESPL. Os procedimentos de análises foram desenvolvidos em duas perspectivas: qualitativa e quantitativa. Por um lado, a análise do desenvolvimento cognitivo, habilidades e competências na assimilação do conteúdo de limite e, por outro a análise quantitativa do desempenho dos estudantes. Portanto, através do enfoque misto demonstra-se uma relação das análises qualitativas das ações como resultados de desempenho por indicadores quantitativos.

Para realizar as análises qualitativas e quantitativas dos dados referentes ao desempenho dos estudantes criamos tabelas e quadros demonstrativos que serão apresentados nas três fases avaliativas: diagnóstica, formativa e final.

Para Ausubel (1980, p. 500) a avaliação é importante no inicio, durante e na conclusão de qualquer sequência instrucional. Em primeiro lugar, devemos decidir quais os resultados da aprendizagem que se deseja induzir, e depois estruturar o processo instrucional de acordo. Em segundo lugar, é necessário determinar o grau de progresso em relação ao objetivo durante o curso da aprendizagem – tanto como a retroalimentação para o estudante quanto como o meio de vigiar a eficácia da instrução. Finalmente, é importante avaliar os resultados finais da aprendizagem em relação aos objetivos, tanto do ponto de vista do rendimento dos estudantes como do ponto de vista dos métodos, materiais de ensino e da prática docente.

Para as análises descritivas da primeira fase (diagnóstica) abordaram-se os aspectos fundamentais do assunto de funções para observar os conhecimentos prévios dos estudantes e, além disso, de maneira implícita observar também o desempenho e a habilidade dos mesmos para resolver problemas.

As aplicações quanto à metodologia da ESPL nos problemas do teste diagnóstico, foram analisadas segundo a execução das ações e a forma segundo foram realizadas, por meio das operações. As ações desenvolvidas obtiveram destaques a partir das descrições qualitativas com relação à resolução e à interpretação da solução dos problemas. Os dados, os instrumentos e os resultados das avaliações foram transcritos para um formulário de análise e disponibilizados para conferência nos (Apêndice C, D e E).

Avaliando a disposição da ordem dos problemas no pré-teste e, considerando o grau de complexidade e o tempo destinado para resolução, o primeiro problema (de menor complexidade) apresentou maior quantidade de respostas em relação aos demais, mesmo estando parcialmente corretas ou até mesmo incorretas, as descrições das análises foram tomadas como fundamentais na elaboração de pressupostos e ideias conclusivas com relação ao desempenho dos estudantes.

No quadro 21 apresentamos o modelo para analisar o desempenho dos estudantes nas provas de lápis e papel do conteúdo de Limite, durante a pesquisa.

Quadro 21

CRITÉRIOS PARA AVALIAR O DESEMPENHO DOS ESTUDANTES	
INDICADORES DE AVALIAÇÃO	CONCEITO – PONTUAÇÃO
• Se todos os indicadores estão incorretos. O estudante não compreendeu, não conseguiu construir o modelo matemático e não soube solucionar o problema.	• Insuficiente (1 – 2)
• Se o indicador essencial está parcialmente correto. Se o estudante apenas esboçou alguma análise do problema, elaborou algum cálculo, mas não conseguiu efetivar nenhuma ação.	
• Se o estudante tem somente correto o indicador essencial. O estudante compreende o problema, atende ao objetivo do problema, mas não executa as outras ações solicitadas e/ou executa as outras ações de forma inadequada e incompleta.	• Regular equivale a 3 (três)
• Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto. Se o estudante executa as principais ações de forma a atender ao objetivo do problema, mas alguma das ações foi executada de forma inadequada e incompleta.	• Bom equivale a 4 (quatro)
• Se todos os indicadores estão corretos. Se todas as ações correspondem ao solicitado pelo problema.	• Ótimo equivale a 5 (cinco)

As avaliações foram realizadas através de provas de lápis e papel da seguinte forma:

- Avaliação diagnóstica: contendo três problemas envolvendo o conteúdo de funções.

- Avaliação formativa: destacaram-se os problemas iniciais envolvendo a ideia de aproximação a um ponto (limite laterais), posteriormente vários problemas envolvendo vários tipos de funções e as leis do limite, com construções de tabelas e gráficos, na sequência, aplicando os princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Trabalhou-se com vários tipos de problemas, aumentando cada vez mais o grau de abstração e complexidade até chegar à definição formal de limite.
- A avaliação final da unidade de limite: foi realizada com a aplicação de um pós-teste com questões sobre as leis de limite e continuidade. Tendo como objetivo analisar se os estudantes assimilaram o conceito de limite e se desenvolveram habilidade na resolução de problemas com a aplicação do sistema de quatro ações e, se houve a transferência para novas situações problemas.

Desse modo, aplicou-se uma avaliação que acompanha o processo de assimilação do conceito de limite, em determinados momentos pontuais, praticando-se uma avaliação da síntese do conteúdo trabalhado, observando a maneira dos estudantes de se expressarem na linguagem escrita, o modo de organizarem suas ideias através dos dados e modelo matemático e a forma de uso da estratégia ESPL na resolução dos problemas.

Portanto, os procedimentos das situações problemas bem como o conhecimento matemático do conteúdo de limite foram avaliados qualitativa e quantitativamente no processo de ensino e aprendizagem quanto às habilidades e competências para aplicar os conceitos de limite. A seguir apresentaremos as análises, os resultados e discussões de cada fase avaliativa.

5.1 A Avaliação Diagnóstica – Pré-teste

Nesta etapa do processo educacional nosso objetivo foi de verificar em que medida os conhecimentos anteriores sobre função ocorreram e perceber as dificuldades dos estudantes na resolução dos problemas apresentados, para planejar ou refazer o planejamento com o intuito de proporcionar uma aprendizagem significativa.

O diagnóstico se constitui de uma sondagem da situação de vivências e desenvolvimento de cada pessoa envolvida no processo. É um estudo dos conhecimentos e das experiências, ou seja, o conjunto de bagagens que os estudantes possuem, visando as tomadas de atitudes satisfatórias e eficazes, de modo que haja o progresso nos processos de ensino e de aprendizagem (Teixeira, 2008, p. 107).

O conhecimento prévio dos estudantes configura-se como parte essencial dos pressupostos pedagógicos da teoria da aprendizagem significativa. é imprescindível que o professor, antes de começar qualquer sequência didática obtenha informações sobre o que o estudante já sabe sobre o conteúdo a ser apresentado para que possa direcionar melhor sua prática de ensino.

Nesta primeira avaliação participaram 10 estudantes, pois o estudante E-09 desistiu após as primeiras aulas. O pré-teste contou com seis questões das quais se escolheram três problemas, denominados de P-01, P-02 e P-03, para se fazer a análise qualitativa e quantitativa das respostas dos estudantes mediante o sistema de quatro ações da ESPL.

A seguir apresentamos o problema 1 (P-01):

Problema (P-01): Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz um número de unidades de determinado artigo por ano; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função $f(x) = 8000 - 1000x$ representa os dados da tabela abaixo.

x (anos)	1	2	3
y (produção)	7000	6000	5000

Responder:

a) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.
b) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.
c) Represente graficamente a função f(x).

Objetivo do problema: O estudante deverá demonstrar ter compreendido o problema, identificando que se trata de uma função decrescente e calculando o prognóstico solicitado. Deverá também identificar o tempo em que não haverá mais produção, construir o gráfico da função e, por fim justificar a solução encontrada.

Ao resolver o problema os estudantes deverão usar seus conhecimentos sobre função afim e aplicar alguma estratégia de resolução de problemas. Portanto, serão observados os aspectos fundamentais sobre a aplicação do conceito de função, necessários para o estudo de limite, o procedimento e as estratégias que usam para encontrar a solução.

Os critérios utilizados para a avaliação do pré-teste foram apresentados no Quadro 21, no qual utilizamos os indicadores essenciais de cada ação para analisar as respostas dos estudantes e, desse modo, emitir um valor para o desempenho na resolução dos problemas.

Neste momento, apresentamos apenas o modelo detalhado da análise do problema 1 (P-01) resolvido pelo estudante 1 (E-01). A análise detalhada das respostas dos demais estudantes encontra-se no Apêndice “B”.

A pontuação dada em cada ação para análise do desempenho dos estudantes na resolução de problemas do conteúdo de limite mediante o sistema de quatro ações da ESPL varia de 1 a 5 e os conceitos (insuficiente, regular, bom e ótimo) correspondem a estes valores (ver Quadro 21). Como as ações correspondem a várias operações, uma dessas operações (de cada ação) torna-se um indicador essencial, ou seja, o que se pede no problema.

Para um problema que poderá ter três ações ou até as quatro ações essenciais é necessário fazer uma análise detalhada dos indicadores essenciais e então fazer uma média da pontuação a partir dos critérios já definidos. Por exemplo, o problema 1, pelas questões apresentadas (a, b e c), parece que envolve todas as quatro ações, mas, deve-se escolher a que corresponde ao objetivo do problema, no caso “solucionar o problema”, e então faz-se uma média dos valores atribuídos a cada uma das ações, considerando os critérios apresentados no Quadro 17, analisando detalhadamente a ação do estudante.

Na Tabela 8, temos a análise de desempenho do estudante E-01, iniciando pela coluna de categorias, onde se determina as ações executadas através das operações, ou seja, dos indicadores essenciais para cada ação. Na coluna “análise descritiva”, encontra-se a descrição das ações realizadas pelo estudante na resolução do problema, na terceira coluna o conceito atribuído a cada ação e, na quarta coluna o valor correspondente ao desempenho na execução da ação, determinado pelos critérios estabelecidos constantes do Quadro 21 (início deste capítulo).

Tabela 8

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 (P-01) DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTUAÇÃO**
Compreender o problema	O estudante determina parcialmente as condições do problema, pois não entendeu que o problema solicitava o prognóstico para os dois anos subsequentes 4 e 5. Não demonstrou entender que se tratava de uma função decrescente e por isso não construiu o gráfico corretamente. Desta forma, define o objetivo de forma implícita e parcial, visto que teve a compreensão sobre o período em que a fábrica se manterá funcionando, pois realizou também os prognósticos para os anos 6, 7 e 8, concluindo que "a partir do 8º ano não haverá mais produção".	R	3
Identificar o modelo matemático.	O estudante E1 identifica que $f(x)$ = 800 -1000x é o modelo matemático e que está relacionado com o prognóstico da produção, e o valor de x com os anos. Faz a aplicação parcial no modelo, pois calcula apenas um dos prognósticos solicitados. Constrói o gráfico de forma crescente, quando o modelo apresenta uma função decrescente.	R	3
Solucionar o modelo matemático	O estudante E1 soluciona parcialmente o problema, pois não fez o cálculo do prognóstico da produção para o 4º ano, fazendo somente o prognóstico para o 5º ano. Construiu o gráfico de forma equivocada (crescente), não observando que o gráfico representa uma função decrescente.	**R**	**3**
Interpretar a solução	Apresentou uma breve justificativa escrevendo: "como há um decréscimo constante por ano, para os próximos dois anos a produção é de 3000 artigos". Mas a resposta correta seria: 7000 artigos, ou seja, o resultado de$f(4) + f(5)$.	R	3

Considerando os dados da Tabela 8, no primeiro problema, o estudante (E-01) desenvolveu a relação entre as variáveis que permitiram compreender o modelo, no entanto, não realizou a interpretação completa da questão (a) e o cálculo do prognóstico de f(4), do 4º ano, solicitado no problema. Realizou o cálculo para os outros prognósticos como f(5), f(6), f(7) e f(8), Contudo não respondeu completamente ao objetivo principal do problema. Na resolução do problema 2 (P-02) o estudante 1 (E-01) demonstrou compreensão ao destacar corretamente as variáveis, entretanto esqueceu-se de um dado importante, tanto para construir o modelo matemático solicitado quanto para solucionar o problema. Por isso, mesmo tendo destacado todos os dados na primeira ação, não conseguiu determinar totalmente o objetivo do problema para elaborar o modelo completo, desse modo não solucionou satisfatoriamente o problema (questão “b”). Na ação de interpretação da solução do problema 2, o aluno esboçou parcialmente a compreensão do problema, porém não finalizou completamente a ideia. Com relação ao problema 3 (P-03) os dados observados nos procedimentos realizados pelo estudante 1 (E-01) estavam ilegíveis e incompletos na cópia feita para análise, pois o estudante elaborou algum cálculo na folha da prova, mas usou também uma folha de rascunho, deixando um espaço para a resolução do problema 3, anunciando apenas uma tentativa na resolução, assim observou-se pouca compreensão do estudante quanto ao objetivo do problema. Foi identificada uma tentativa de elaboração do modelo matemático, iniciando com uma ideia correta, no entanto, os conhecimentos prévios foram insuficientes para elaborar o modelo. Observou-se então que o estudante ainda não possuía habilidade suficiente para aplicar o conceito de função real e equação da reta de maneira adequada que lhe permitisse encontrar a solução do problema. Além disso, quanto à estratégia de resolução dos problemas observou-se que o estudante apenas esboçava relacionar alguns dados e depois já executava o cálculo para a resolução, ou seja, não fez nenhuma descrição do procedimento de resolução que se pudesse identificar o modelo de estratégia adotado. Após arguição por parte da professora o estudante afirmou: “*não costumo usar nenhuma estratégia definida, vou fazendo conforme me vem na cabeça*”.

A seguir, na tabela 9, apresentamos uma síntese do desempenho da avaliação diagnóstica do estudante 1 (E-01). As sínteses dos demais estudantes encontram-se no Apêndice B.

Tabela 9

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA Síntese do Desempenho do Estudante (E-01)					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Indicador Essencial do Problema**
nº 01	3	3	**3**	3	Solucionar o modelo de função afim, dado no problema, para determinar os prognósticos dos próximos anos.
nº 02	4	**3**	3	3	Construir o modelo matemático da função afim, para determinar o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 03	3	2	**2**	2	Solucionar o modelo matemático referente à planta A em função da Planta B, ou seja, calcular a taxa de variação e aplicar na função dada. Resolver as duas funções dadas e encontrar o dia em que as plantas A

	e B atingiram a mesma altura.

Legenda: (P) problema; (1ªA) primeira ação: compreender o problema; (2ªA) segunda ação: construir o modelo matemático; (3ªA) terceira ação: solucionar o modelo matemático; (4ªA) quarta ação: interpretar a solução. Em negrito dá-se ênfase aos valores correspondentes à ação essencial do problema.

Conforme se pode observar na síntese do desempenho da avaliação diagnóstica, o estudante 1 (E-01), em todas as quatro ações, não atendeu aos objetivos dos três problemas selecionados para a análise, o que se pode observar pelos indicadores essenciais (cuja pontuação máxima é 5), demonstrando ter conhecimento prévio insuficiente sobre função, função afim e geometria analítica (equação da reta, cálculo do coeficiente angular) para assimilação do novo conhecimento.

Apresentamos na Tabela 10 o desempenho discente referente à análise do pré-teste, mediante o sistema de quatro ações da ESPL dos três problemas (P-01, P-02 e P-03) no qual I é insuficiente (refere-se à pontuação das quatro ações, de 1 e 2), R é regular (refere-se à pontuação 3), B é bom (refere-se à pontuação 4), O é ótimo (refere-se à pontuação 5).

Tabela 10

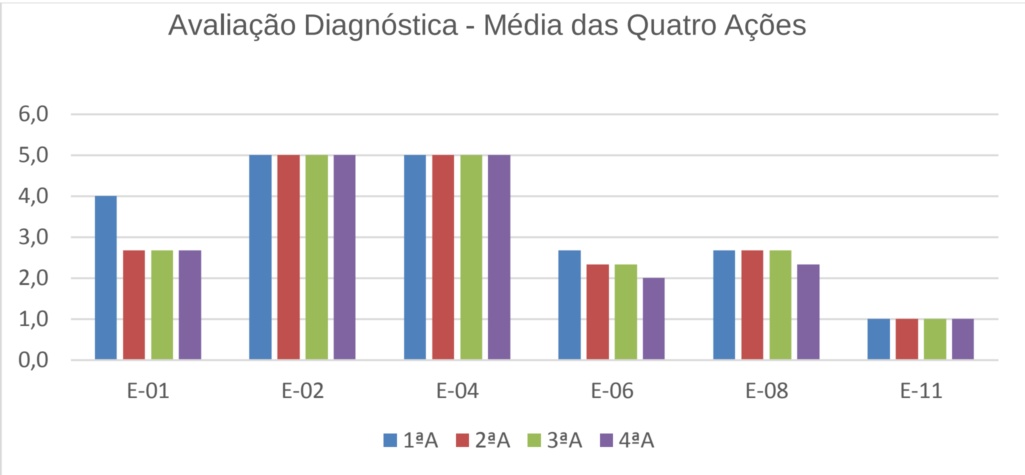
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA (qualitativa)			
ESTUDANTE	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2	PROBLEMA 3
E-01	R	R	I
E-02	O	O	O
E-04	O	O	O
E-06	B	I	I
E-08	O	I	I
E-11	I	I	I

Concluindo as análises dos resultados do teste diagnóstico identificou-se que dois estudantes da turma possuíam habilidades e competência para resolver os problemas propostos de funções, pois alcançaram conceito ótimo nos três tipos de problemas selecionados. Apenas um estudante obteve conceito regular no desempenho, pois apresentou dificuldades de compreensão, em construir o modelo matemático, solucionar e interpretar o problema em todos os problemas apresentados. Entretanto, seis estudantes (60%) demonstraram não possuir conhecimento prévio para resolverem os problemas propostos. Dos 11 estudantes que estavam matriculados somente um dos estudantes (E-11) não compareceu para fazer o teste diagnóstico, desse modo, as análises dos resultados foram realizadas considerando apenas os dez estudantes que participaram do pré-teste, mas para efeito da pesquisa foram selecionados apenas seis estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11), pois estes foram assíduos e participativos do início ao fim da pesquisa. Contudo, coletamos os dados dos outros estudantes e, da mesma foi realizada a análise de seus desempenhos.

A seguir apresentamos os resultados da avaliação diagnóstica dos estudantes através de gráficos para uma visão geral do desempenho dos mesmos.

No Gráfico 1 apresentamos a média das quatro ações dos três problemas analisados da avaliação diagnóstica. Aqui, consideramos somente a participação dos estudantes que participaram assiduamente da pesquisa até a avaliação final.

Gráfico 1



Conforme o Gráfico 1 (média das quatro ações) resultado da análise da resolução dos três problemas pelos seis estudantes que participaram assiduamente da pesquisa, observa-se que somente dois estudantes saíram-se muito bem em todas as quatro ações avaliadas através do sistema de quatro ações da ESPL. Três estudantes (E-01, E-06 e E-08) tiveram desempenho regular nas quatro ações (compreender o problema, construir o modelo matemático solucionar o modelo e interpretar a solução). Destes três estudantes, observa-se que no E-01 sobressaiuse na 1ª ação de “compreender o problema”, mas provavelmente por falta de conhecimento nos conceitos matemáticos não conseguir realizar satisfatoriamente as demais ações. O estudante 11 (E-11) não obteve pontuação porque não compareceu ao pré-teste e, quando começou a frequentar as aulas, a professora já estava trabalhando com os organizadores prévios (assuntos abordados no teste diagnóstico) e, por isso este estudante não realizou o pré-teste em outro momento posterior. Portanto, destes estudantes somente dois estudantes conseguiram sair-se muito bem nas quatro ações obtendo o conceito ótimo em todas as ações, ou seja, conseguiram solucionar satisfatoriamente o problema.

5.1.1 Análise descritiva dos resultados do nível de partida

A partir do teste diagnóstico analisaram-se os conhecimentos prévios dos estudantes principalmente sobre o conceito de função, função afim e função afim e geometria analítica que, de modo geral, alcançaram um nível regular de aproveitamento. Contudo o baixo rendimento (66,67% dos estudantes) na resolução dos problemas do teste diagnóstico deu-se devido à ausência de competências relacionadas com o conceito de função afim e geometria analítica (equação da reta) e, também na construção de gráficos referentes à função real (função racional). Outra dificuldade percebida foi com a descrição dos procedimentos de resolução de problemas e o uso da linguagem matemática.

Com relação às quatro ações da estratégia de resolução de problemas, os estudantes não apresentaram uma estratégia explícita, pelo menos dois estudantes relacionaram os dados e resolveram os cálculos com alguma organização, justificando a solução encontrada, os outros apenas fizeram tentativas de resolução usando algum algoritmo.

A dificuldade maior foi percebida no terceiro problema (P-03) que apresentou maior complexidade que os outros dois, pois envolvia dois tipos de equações (uma equação de primeiro grau representada pela reta e uma equação racional, envolvendo uma equação do segundo grau) e o cálculo da inclinação da reta. Outra observação importante refere-se à habilidade da execução da ação de elaborar um modelo matemático a partir da descrição dada no problema: os estudantes demonstraram maior dificuldade, provavelmente por não terem treinado problemas desse tipo ou por não terem assimilado adequadamente o conteúdo matemático que lhes permita executar tal ação. Entretanto, quando lhes é apresentado o modelo, tanto através de fórmulas como de tabelas ou gráficos, os estudantes conseguem solucionar o problema com mais facilidade.

Cabe ressaltar aqui, que esses conceitos matemáticos requeridos para assimilação do novo conhecimento tinham sido trabalhados em disciplinas no período anterior. Contudo observou-se que mesmo assim, a maioria dos estudantes mostrou conhecimento prévio insuficiente para resolver os problemas apresentados envolvendo o conceito de função.

Diante das observações e identificação das dificuldades demonstradas pelos estudantes, a sequência das aulas foi planejada pela professora da disciplina do IFRR, inicialmente para se trabalhar com os organizadores antecipatórios do conceito de função, principalmente função afim e geometria analítica (coordenadas no plano, equação da reta, coeficiente angular e linear). Além desses assuntos também foram tratados alguns pontos solicitados pelos estudantes no momento das aulas expositivas. Contemplando a retroalimentação do teste diagnóstico destacam-se alguns momentos onde os estudantes obtiveram a oportunidade de expor suas dúvidas e também responder aos questionamentos da professora, os quais foram transcritos para o Quadro 22 em forma de diálogo, visando representar a linguagem verbal dos estudantes com relação ao seu desempenho no teste diagnóstico:

Quadro 22 – Aula após aplicação e correção do pré-teste (Correção dos problemas e Retroalimentação).

Aula (02) Objetivo: corrigir o pré-teste recordando o assunto de funções Abordagem teórica: método da ESPL (estímulo à linguagem escrita).	Professora: *O que vocês acharam do teste?* Comentário dos alunos sobre o seu próprio desempenho na resolução do pré-teste: R1: *não foi fácil resolver*. R2: *resolvi quase todos, faltou somente a última questão*. R3: *não consegui*. Comentário da Professora referindo-se à solicitação de justificar as respostas: *A linguagem é importante para a descrição da análise na resolução de um problema. É através da linguagem que se demonstra o entendimento sobre o objetivo e a identificação dos dados do problema.* *A forma de justificar a resolução de um cálculo para aquele que corrige possa ser convencido pelas respostas dadas é o argumento descritivo em linguagem matemática tanto na forma algébrica quanto na forma literal.*

Questionamentos sobre o problema 1 (P-01) com base na ações: 1 e 4, “compreender o problema” e “interpretar a solução” Questionamentos sobre o problema (P-02) resolução com base nas ações: 2 e 3, “construir o modelo” e “solucionar o modelo” Questionamentos sobre o problema 3 (P-03) resolução com base nas ações: 1 e 3, “compreender” e “interpretar a solução” Argumentação dos estudantes: Legenda: R1 – resposta 1 e, assim sucessivamente; A1 – argumentação 1 e, assim sucessivamente.	Professora pergunta: *O que demonstra que determinada função está crescendo?* R1: *o sinal de subtração (-).* Professora (continua perguntando): Qual o período que a produção da fábrica irá ser esgotada? R1: *8 anos, conforme os dados da função*. Professora: *Que tipo de função é abordado no problema?* Três alunos responderam ao mesmo tempo: *função linear decrescente.* Professora: *Qual o comportamento da função foi observado?* [...] Os alunos ficaram em silêncio, mas logo em seguida alguém respondeu: R1: *tem que encontrar a equação da reta*. Os demais concordaram: *Sim, primeiro tem que encontrar a equação da reta para saber [...].* R2: *há!... por isso eu não consegui responder [...],* um dos alunos afirmou. Professora: *quais de vocês responderam esse problema (o terceiro)?* R1: *não respondi essa*; R2: *resolvi todos*; Os demais ficaram em silêncio. A1: *eu encontrei a resposta usando o método da regra de três.* A2: *eu também posso resolver usando o mesmo método pra juros compostos?!!!.* Professora: *para encontrar o resultado, sim! Porém, este seria um mecanismo para resolver um problema em particular. Os demais seriam resolvidos de forma linear, precisamos de um modelo.* Q3: *Qual o objetivo da disciplina de Cálculo?* R: não foi possível registar a resposta da professora [...]

No decorrer da aula, com relação à participação dos estudantes, foram observados momentos de reflexão e questionamentos. Dessa forma pode-se observar a expressão da linguagem verbal dos estudantes no acompanhamento da resolução dos problemas.

Com base nos questionamentos da professora, apenas três alunos interagiram respondendo correta ou parcialmente corretas às questões, enquanto que os demais se mostravam atentos às suas explicações e observando os procedimentos de resolução que a professora fazia no quadro branco.

Todos os problemas do teste diagnóstico foram solucionados pela professora utilizando o sistema de quatro ações da ESPL, que aproveitava para estimular a participação dos estudantes na construção dos modelos de funções e, assim encontrar os resultados conforme o objetivo de cada problema. No final, comprovou-se que os alunos tinham muita dificuldade para elaborar sozinhos os modelos, ainda precisavam da ajuda da professora. Após ter apresentado os procedimentos na resolução de cada problema, a professora ressaltou *que entender o problema e construir o modelo matemático a partir das descrições literais é uma ação importante e necessária para poder generalizar a ideia e possibilitar a aplicação em outras situações problemas*.

Portanto, a partir das dificuldades apresentadas pelos estudantes no teste diagnóstico, na retroalimentação do processo, a professora procedeu com esclarecimentos mais detalhados dos pontos em que os estudantes apresentaram mais dificuldade, dando ênfase também na elaboração dos modelos matemáticos com relação à aplicação dos conceitos.

5.2 Resultados da Avaliação Formativa

Nesta fase tem-se como preocupação central coletar dados para reorientar os processos de ensino e de aprendizagem. É empregada durante todo o processo, considera todos os aspectos educacionais e permite a continuidade ou o redimensionamento do processo de ensino (TEIXEIRA, 2008, p. 109).

É realizada com o propósito de informar o professor e o estudante sobre o resultado da aprendizagem durante o desenvolvimento das atividades escolares. Através dessa avaliação o professor poderá identificar as deficiências na organização do ensino e aprendizagem, de modo a possibilitar reformulações no mesmo e assegurar o alcance dos objetivos. Além disso, ao perceber as dificuldades de cada estudante poderá planejar ações para ajudar os estudantes a superarem as mesmas. Desse modo, a avaliação torna-se uma avaliação de acompanhamento do processo para obter os resultados desejados (LUKESSI, 2011, p. 13).

Nossa percepção aqui, é que a avaliação não pode ser separada do ato pedagógico, pois segundo Lukessi (2011, p. 14) “a avaliação é parte do ato pedagógico, formando um todo com os atos de planejar e executar”.

É chamada formativa no sentido que indica como os estudantes estão se modificando em direção aos objetivos (LUCKESSI, 2011).

A análise da avaliação formativa foi realizada, para efeito desta pesquisa no conteúdo de Limite considerando o sistema de quatro ações, da estratégia de situações problema. Os objetivos definidos para a escolha dos problemas que foram analisados são:

- Verificar se os estudantes estavam aplicando a ESPM;
- Observar se eles conseguiriam assimilar o conceito de limite e aplicar na resolução dos problemas apresentados pela professora;

Apresentaremos aqui, apenas o resultado das análises dos problemas (P-04), (P-05), (P-06) e (P-07) do estudante (E-01) da avaliação formativa nas Tabelas 9, 10, 11 e 12. Quanto às análises dos problemas respondidos pelos demais estudantes (E-01, E-02. E-04, 3-06, e-08 e E-11), os resultados encontram-se no apêndice “C”.

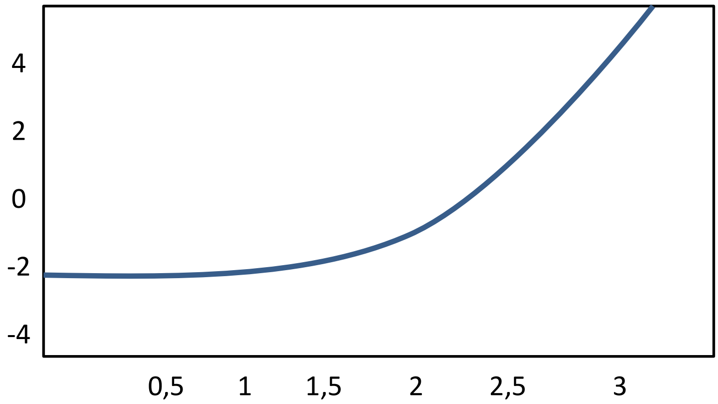
A análise descritiva de cada ação executada pelos estudantes através das operações dá ênfase ao estudo qualitativo. Desse modo, mediante esta análise utilizamos os conceitos: insuficiente, regular, bom e ótimo (I, R, B, e O) que correspondem aos valores atribuídos aos indicadores de cada uma das quatro ações do desempenho na resolução dos problemas (P-04, P-05, P-06 e P-07) de acordo com os parâmetros já mencionados no início deste capítulo.

A seguir apresentamos os problemas escolhidos (P-04, P-05, P-06 e P-07) para se realizar o estudo quali-quanti da fase formativa.

PROBLEMA 4

Este problema tem por objetivo a análise do comportamento de uma função real quadrática, em um determinado ponto, atribuindo-se valores nas vizinhanças a esse número tanto pela direita quanto pela esquerda, para assimilar a ideia de limite por aproximação e, além disso, verificar a prática do estudante com os diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 04: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:



d) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x=2

x=2 (esquerda)	
x	f(x)

x=2 (direita)	
x	f(x)

e) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

f) Explique o comportamento da função $f(x) = x^2 + x - 6$ no ponto $x = 2$.

A seguir, na Tabela 11 apresentamos a análise das respostas do estudante (E-01) ao problema 4 (P-04). Nesta análise procuramos perceber como o estudante realiza a resolução, se tem alguma organização nos procedimentos, se usou a estratégia da ESPL e se de fato compreendeu o problema e assimilou os conceitos de limite relacionados ao mesmo. Para tanto, realizamos esta análise mediante as quatro categorias, fazendo uma análise descritiva das ações do estudante de acordo com as respostas dadas nos testes aplicados e, concluindo com conceitos e pontuando seu desempenho.

Problema 4 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 11

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 4 DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante faz a leitura extrai os elementos do problema dado, destacando valores aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	O	5
Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função $f(x)= x^2+x-6$, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 pela esquerda e 2,5 até 2,001 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "investigamos os valores da função quando x tende a 2. Observa-se que a medida que x se aproxima de 2 tanto pela esquerda, quanto pela direita, mais próximo de 0 estará f(x)", que foi observado pelo cálculo da função f(x) dando valores próximos de 2 para x.	O	5

Conforme a tabela acima se pode observar que o estudante (E-01), de acordo com as quatro ações, compreendeu o problema (P-04) o que refletiu nas demais ações, pois pode completar o modelo matemático conforme solicitado nas questões adicionais do problema, conseguindo solucionar satisfatoriamente o problema e, também descreveu adequadamente e, em linguagem matemática sua compreensão sobre do comportamento da função dada no problema.

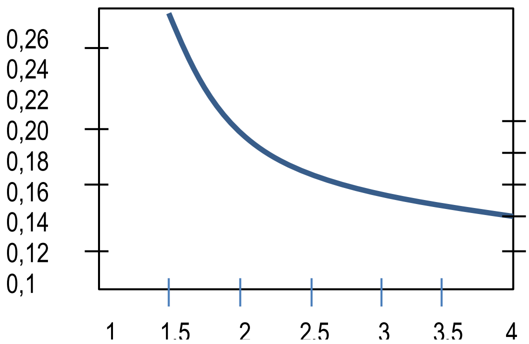
Os demais problemas (P-05, P-06 e P-07) apresentam graus cada vez maiores de complexidade, mas têm o mesmo padrão, somente o último (P-07) não é sobre limites laterais.

PROBLEMA 5

O segundo problema (P-05), trata de limites laterais de uma função racional, cujo denominador contém uma equação de segundo grau incompleta. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível maior de complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição (domínio) para sua resolução. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 05:

Dada a função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



d) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)	
x	f(x)

x=1 (direita)	
x	f(x)

e) Represente os pontos da tabela no gráfico.

f) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ no ponto x = 3.

Problema 5 – Estudante (E-01) – Análise da resolução

Tabela 12

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional e identificou o domínio “D=R = {±3}”, e também explicou o comportamento da função no ponto dado.	B	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,5 →f(x)=0,1818181818 e 2,9999 → f(x) = 0,16666694445 pela esquerda e 3,5 → f(x)=0,1538461538 e 3,0001 → f(x) =0,16666638889 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=3. Desse modo, ele explica: “nas vizinhanças de 3, a função f(x) tem limite 0,16, porque tanto pela direita quanto pela esquerda de 3, nos aproximamos de 0,16 em f(x).	O	5

Conforme a tabela acima se pode observar que o estudante (E-01) na resolução do problema (P-05) deu indicações de que compreendeu o problema, pois identificou o domínio, embora não tenha escrito os cálculos, mas colocou D = R = {± 3} (não é uma descrição adequada, mas dá pra entender o que o estudante quis dizer). Respondeu satisfatoriamente a todas as questões complementares (a, b e c), preencheu as tabelas com os valores de acordo com o gráfico e em seguida identificou no gráfico através de retas pontilhadas a aproximação ao limite que foi identificado, após cálculos a partir da função dada e, explicou o comportamento da função conforme solicitado. Desse modo, conclui-se que o estudante (E-01) respondeu satisfatoriamente a todas as quatro ações.

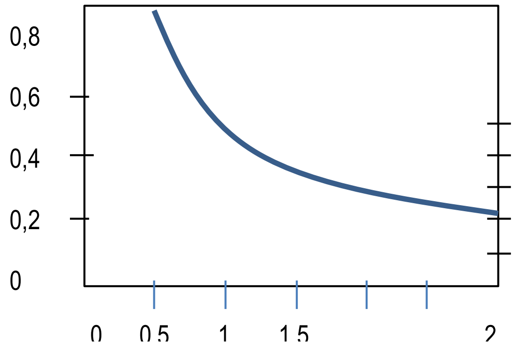
Cabe ressaltar que aqui, nestes tipos de problemas a intensão da professora foi de consolidar o conhecimento conceitual de limite, considerando a definição formal, mais abstrata, a partir da ideia intuitiva mediante aproximação, usando modelos matemáticos como fórmulas, tabelas e gráficos, incentivando o raciocínio e a análise descritiva. Além disso, através da seleção criteriosa dos problemas a professora estava consolidando os métodos pedagógicos da aprendizagem significativa tais como: diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

PROBLEMA 6

Este problema trata de limites laterais de uma função real, racional, em que o estudante deve aplicar os conhecimentos de resolução de equação envolvendo radiciação e equação do primeiro grau. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível de média complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição para sua resolução que é o domínio. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 06:

Dada a função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



d) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)	
x	f(x)

x=1 (direita)	
x	f(x)

e) Represente os pontos da tabela no gráfico. f) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ no ponto x = 1.

Problema 6 – Estudante (E-01) – Análise da resolução

Tabela 13

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional. Analisou satisfatoriamente a função nas vizinhanças do ponto dado preenchendo as tabelas com os valores e identificando esses valores no gráfico.	O	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas, em ambos os lados, próximo ao número 1.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 →f(x)=0,585786437 e 0,999 → f(x) = 0,500125063 pela esquerda e 1,5 → f(x)=0,449489782 e 1,001 → f(x) =0,49987506 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=1. Desse modo, ele explica: “nas vizinhanças de 1, a função f(x) = $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ tem limite 0,5. Pois percebemos que tanto pela direita quanto pela esquerda de 1, nos aproximamos de 0,5 em f(x). Portanto, o estudante atendeu satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Quanto ao problema (P-06), mediante as respostas aos questionamentos adicionais do problema, o estudante (E-01) apresentou compreender bem o problema, e isto refletiu em todas as demais ações, visto que respondeu satisfatoriamente ao objetivo do problema, solucionando o modelo de acordo com os conceitos matemáticos da resolução de função racional e da ideia de aproximação de um ponto (limites laterais) e, além disso, descreveu sua justificativa para a solução encontrada dentro da lógica matemática usando adequadamente a linguagem matemática.

PROBLEMA 7

O problema (P-07) apresenta-se com um nível de abstração maior que dos outros problemas, pois se entende que o estudante que já se familiarizou com a ideia de aproximação de um ponto através de vários exemplos e exercícios. Na sequência foram apresentadas as leis do limite, então, se espera que agora o estudante possa mostrar que já tem competência para resolver questões mais abstratas do conceito de limite. Com este problema tem-se o objetivo de analisar a compreensão do estudante do conceito de limite a partir da definição formal (abstrata) e também do seu entendimento sobre o conceito de continuidade.

PROBLEMA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$. c) É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$? d) Justifique sua resposta.

Problema 7 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 14

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) deve explicar seu entendimento da definição formal de limite. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, como o estudante não faz nenhuma referência a isso, conclui-se que sua explicação é insuficiente para atender aos objetivos do problema.	B	4
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	B	4
Solucionar o modelo matemático	Para explicar o que foi solicitado, o estudante escreve: “o limite de f(x) é igual a 7 quando x tende para, ou seja 2, nas vizinhanças de 2, tanto pela direita quanto pela esquerda nos aproximamos de 7” e, para a questão (a) responde “Sim ao questionamento e justifica da seguinte forma: “pois sendo a função f(x) pegando x=2 e substituindo na função encontramos 2 como resultado”. Contudo, sua resposta está incompleta e, por isso, não satisfaz ao objetivo do	B	4

	problema.		
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de “solucionar o modelo matemático”	B	4

Para o problema (P-07), o estudante (E-01) demonstrou ter compreendido parcialmente o problema apresentado. Considerando a interpretação da definição formal de limite, apresentada através de um modelo mais abstrato, respondeu satisfatoriamente à questão, entretanto, para aplicação dessa definição em outro contexto (assim como todos os outros estudantes) não conseguiu responder ao objetivo do problema quanto à sua interpretação, visto que o exemplo apresentado trata-se também do conceito de continuidade de uma função. Conclui-se que este estudante (E-01) ainda precisa trabalhar mais seu nível de compreensão sobre a definição formal (mais abstrata) de limite.

A partir da análise do desempenho do estudante (E-01) no período de aquisição do significado, retenção inicial, esquecimento, diferenciação adicional das ideias assimiladas (processo de assimilação segundo Ausubel), a partir da análise da resolução dos problemas selecionados, observou-se que este aluno melhorou bastante seu desempenho durante o processo, em relação aos resultados do teste diagnóstico, mas, os conceitos formados ainda permanecem razoáveis na assimilação da definição de Limite quando apresentado de forma mais abstrata, ou seja, considerando os aspectos da abstração e generalização, ainda precisa-se de mais trabalho com este e os demais estudantes para se chegar a um nível razoável de aprendizagem.

Na Tabela 15 temos a síntese do desempenho das ações do estudante (E-01) por indicadores quantitativos, conforme as soluções obtidas nos quatro problemas selecionados para análise. As sínteses dos demais estudantes encontram-se no Apêndice C.

Tabela 15

AVALIAÇÃO FORMATIVA Síntese do Desempenho do Estudante (E-01)					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas

					proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**4**	4	**4**	4	Interpretar a definição $\lim_{x \to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Apresentamos na tabela 16 o conceito referente à análise descritiva das respostas dos estudantes aos quatro problemas apresentados para o estudo qualitativo da avaliação formativa.

Tabela 16

AVALIAÇÃO FORMATIVA (Qualitativa)																
	P04				**P05**				**P06**				**P07**			
	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
E-01	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	B	B	B	B
E-02	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	B	B	B	B
E-04	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	I	I	I	I
E-06	O	O	O	O	B	O	B	O	B	O	B	O	R	R	R	R
E-08	O	O	O	O	O	O	O	I	B	B	B	R	R	R	R	R
E-11	O	O	O	O	O	O	O	O	B	B	B	O	B	B	B	B

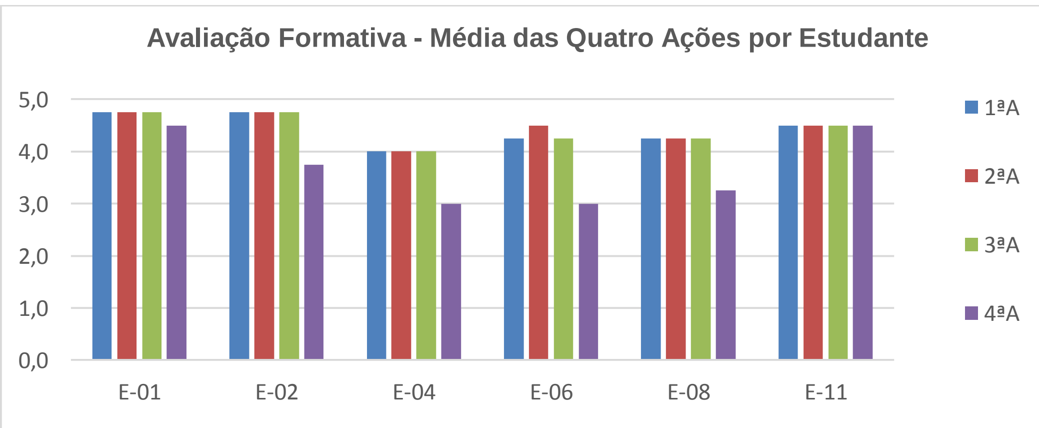
A tabela 16 mostra o resultado mediante os conceitos insuficiente (I), regular (R), bom (B) e ótimo (O) na resolução dos problemas (P-04, P-05, P-06 e P-07) dos estudantes na avaliação formativa. Observa-se que três estudantes (E-01, E-02 e E-04) conseguiram responder satisfatoriamente a todas as quatro ações dos problemas 4, 5 e 6, obtendo conceito máximo. Considerando estes mesmo estudantes para avaliar o desempenho no último problema que apresentou com um grau bem maior de abstração e generalização, dois deles (E-01 e E-02) obtiveram o conceito bom, pois não conseguiram provavelmente descrever melhor sua compreensão a respeito da definição formal de limite. O estudante E-11 também se saiu muito bem, pois obteve nos dois primeiros problemas o conceito ótimo, e nos outros dois últimos (por apresentarem-se com mais complexidade e abstração) o estudante demonstrou um pouco de dificuldade para atender aos objetivos dos problemas.

Apenas um estudante (E-04) apresentou bastante dificuldade em resolver o último problema, talvez porque não conseguiu expressar em linguagem escrita a sua compreensão da definição formal de limite apresentada de forma mais abstrata com aplicação também do conceito de continuidade. Entretanto, nos três problemas iniciais, que se trata da compreensão do conceito de limite por aproximação a um ponto, mesmo com funções reais (quadrática e racional) este estudante conseguiu realizar satisfatoriamente todas as ações, obtendo conceito máximo, talvez porque estes problemas apresentavam os modelos matemáticos e indicações precisas das ações.

De maneira geral, pode-se observar que os estudantes demonstram um bom desempenho na resolução dos problemas, atendendo aos objetivos de aprendizagem. Apenas dois desses estudantes demonstravam mais habilidade e competências no conhecimento matemático requerido (isto foi observado na avaliação diagnóstica) e se confirmou durante as aulas, através da participação na linguagem verbal e escrita desses estudantes. Pode-se perceber que a dificuldade apresentada para assimilação de conceitos mais abstratos vem de muito tempo, pois falta maturidade no conhecimento matemático que deveria ter se consolidado já no ensino médio.

A seguir apresentamos o gráfico da média das ações dos estudantes na resolução dos problemas selecionados da fase formativa.

Gráfico 2



5.3 Resultados da Avaliação Final

Nesta fase analisamos um momento de conclusão da unidade de limite para a nossa pesquisa, visto que para a professora da disciplina haverá continuidade das aulas e, provavelmente ela ainda trabalhará com os alunos as dificuldades apresentadas na resolução destes problemas e poderá esclarecer dúvidas e eliminar conflitos e também pensamentos contraditórios a respeito do conceito de limite. Contudo, o resultado encontrado a partir destes problemas poderá dar-nos uma visão de como os estudantes chegaram até este momento, neste processo de ensino que foi permeado pela metodologia de resolução de problemas e princípios da aprendizagem significativa.

Desse modo, apresentamos os problemas selecionados para análise do conhecimento sobre o conceito mais abstrato de limite, envolvendo vários tipos de funções como a logarítmica, exponencial, racional com aplicação do conceito de continuidade e limites ao infinito, apresentando alto grau de abstração e generalização. Estes problemas foram aplicados no teste final da unidade de limite e analisados mediante o sistema de quatro ações da ESPL.

PROBLEMA 08 (P-08)

O problema (P-08) propõe a aplicação da definição de limites laterais e a verificação se cada uma das funções é contínua ou descontínua e explicar com base da definição de continuidade de uma função a partir das condições para uma função ser contínua. Além disso, o estudante deverá fazer os cálculos de aproximação a um ponto e compor as duas tabelas para os limites laterais e esboçar os gráfico que representam as funções.

Problema 8 - Explique que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função:

e) $f(x) = \ln|x-2|$ a = 2

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \ se\ x \neq 1 \\ 2\ se\ x = 1 \end{cases}$ a = 1

g) $f(x) = \begin{cases} e^x \ se\ x < 0 \\ x^2\ se\ x \geq 0 \end{cases}$ a = 0

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \ se\ x \neq 1 \\ 1\ se\ x = 1 \end{cases}$ a =1

PROBLEMA 9 (P-09)

O problema (P-09) propõe a aplicação da definição de limites laterais na análise contextual para identificar o custo percentual de remoção de resíduos tóxicos, como objetivo do problema, com base na definição de limite. Portanto, o estudante deverá analisar o curso para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites laterais e concluir que, quanto mais próximo de 100 forem os valores de x pela esquerda, o limite poderá crescer indefinidamente ou decrescer indefinidamente.

Problema 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0,8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

c) Calcule $\lim_{x\to 100-} S(x)$

d) Interprete o resultado obtido

No quadro 23 apresentamos o modelo para a análise dos dois problemas (P-08 e P-09) da avaliação final.

Quadro 23

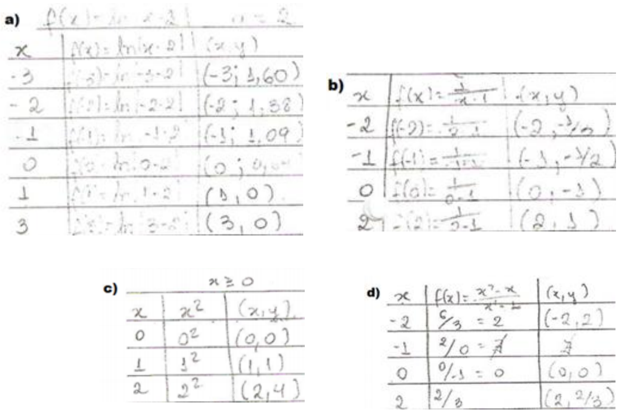
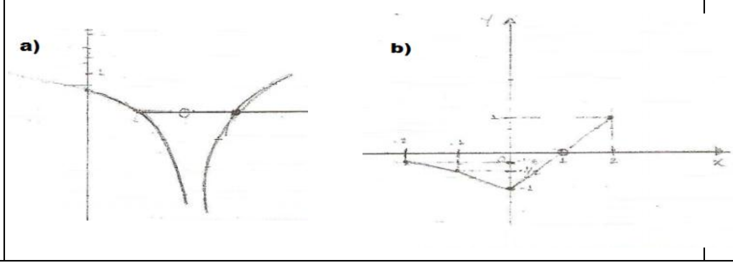
MODELO PARA ANÁLISE DOS PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO FINAL			
PROBLEMAS	**OBJETIVO**	**CATEGORIAS**	**PARÂMETROS CONCEITUAIS**
P – 08	Aplicar o conceito de limites laterais e continuidade em vários tipos de função.	Solucionar o modelo matemático.	Construir as tabelas com valores pela esquerda e pela direita e identificação dos pontos dados no gráfico de cada uma das

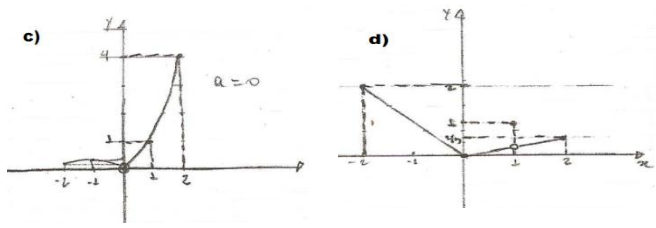
	O aluno deverá usar o conceito de função continua e fazer o esboço do gráfico da função. Para uma função ser continua em um numero dado, deve satisfazer três condições: analisando a continuidade num ponto c, as condições são: (i) $f(c)$ é definida; (ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe e (iii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.		funções. (a) Descontinua, $f(2)$ não está definida $f(x) = \|x-2\|$. (b) Descontínua, pois o limite não existe, tendo em vista que os limites laterais são diferentes. Não atende o (ii). (c) Descontínua. a mesma justificativa anterior (d) Contínua. Atende aos três requisitos
P – 09	Interpretar o conceito de limites laterais na situação problema.	Compreender o problema. Solucionar o modelo matemático.	O aluno deve explicar que o resultado encontrado é o custo máximo para remover 809 dos resíduos se retira 80% dos resíduos chega-se ao custo máximo. $f(1)$ está definido $f(1) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ (2) $s(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}\ com\ 0 < 0 < 100$ $\lim_{x\to 100-} s(x) = 80$

A seguir apresentamos a análise dos resultados aos dois problemas (P-08 e P-09) do teste final do estudante E-01.

Problema 8 (P-08)– Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 17

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-01) - PROBLEMA 8 (P-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante faz a leitura de todas as questões, do item (a) até (d), identificando as funções e atribuindo valores para x em f(x). Observa-se, que elabora a tabela de demonstração das coordenadas (x, y) encontradas em f(x). Esboça o modelo para resolver cada função e ao explicar o procedimento.	O	5
Construir o	Determina as incógnitas das coordenadas e da variável	O	5

modelo matemático	x em f(x). Elabora e faz uso dos modelos para encontrar as coordenadas e para realizar o esboço do gráfico. O estudante faz a aplicação das variáveis e incógnitas para determinar se a função é contínua ou descontínua e encontrar as coordenadas dos gráficos.		
Solucionar o modelo matemático	O estudante utiliza o método de atribuição de valores para x em f(x) para encontrar as coordenadas do gráfico, observando o critério do valor dado na função. Soluciona o modelo de todas as questões compondo uma tabela organizada pelo método de atribuição de valores para x em f(x) próximos ao valor limite da função: a) encontrou os pontos (-3, 1,6), (-2, 1,38), (-1, 1,09), (0, 0,04), (1, 0) e (3, 0); b) encontrou os pontos (-2, -1/3), (-1, -1/2), (0,-1) e (2,1); c) encontrou os pontos (1, 2, 7183^-1) e (-2, 2,7183^-2); d) encontrou os pontos (-2,2), (não existe), (0,0), (2, 2/3). 	O	5
Interpretar a solução	O estudante estrai de todas as funções dadas no problema os resultados relacionados ao objetivo de cada uma, com respectiva descrição do resultado encontrada, neste caso, se a função é contínua ou descontínua. Encontra a resposta para todas as funções dadas no problema, cria uma tabela para cada função, atribuindo-lhes valores para x em f(x) para encontrar os pontos das coordenadas do gráfico, posteriormente o estudante esboça o gráfico geométrico da função com todos os elementos da função mencionados, com análise e afirmação do resultado. a) é descontínua em 2, pois não existe imagem; b) é descontínua em 1, pois não existe imagem para este número; c) não respondeu; e d) é descontínua porque em f(x)= (x²2-x)/(x²2-1), o f(a) não existe. 	B	4

<table>
<tr><td></td><td>

Não mencionou a resposta da questão (c) se a função é contínua ou descontínua. E errou a questão (d) ao colocar que a função é descontínua.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Problema 9 (P-09)– Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 18

<table>
<tr><th colspan="4">AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-01) - PROBLEMA 9 (P-09)</th></tr>
<tr><th>CATEGORIAS</th><th>ANÁLISE DESCRITIVA</th><th>CONCEITO</th><th>PONTOS</th></tr>
<tr><td>Compreender o problema</td><td>O estudante extrai os elementos necessários para aplicação dos valores nas vizinhanças do número indicador do limite.
Não determina corretamente, pois faz abordagem da função limite acrescentando o símbolo de mais infinito.
a) $\lim_{x \to 100^-} S(x) = +\infty$
Define por tentativa de ensaio e erro, pois a forma algébrica desenvolvida atribui para x valores muito próximos de 100 para visualizar o comportamento da função. Neste caso a função não tende ao infinito.</td><td>I</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Construir o modelo matemático</td><td>O estudante identifica as variáveis e incógnitas do problema, nomeando na tabela. Nomeia as variáveis do problema. Constrói parcialmente, pois se observou que o estudante não compreendeu o problema: Não realizou a análise das medidas, pois não usou o intervalo dado, de modo que não atribuiu valores adequados para a variável x.<table><tr><td>x)</td><td>$S(x)=\frac{0.8x}{100-x}$</td></tr><tr><td>99,95</td><td>1599.2</td></tr><tr><td>99,99</td><td>7999.2</td></tr></table></td><td>I</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Solucionar o modelo matemático</td><td>Faz uso parcial do método de substituição de valores para x muito próximos do valor de 100, até a segunda casa decimal. Não soluciona o modelo dado no problema, pois não compreendeu o problema e não utilizou as variáveis adequadas, atribuem os seguintes valores: (99,95 e 99,99) para x, encontrando os valores de S(x) (1599,2 e 7999,2).</td><td>I</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Interpretar a solução</td><td>Extrai parcialmente os elementos relativos ao problema para encontrar a solução. Sua resposta não responde ao</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	objetivo do problema. O relatório realizado pelo estudante é insuficiente e incorreto para demonstrar compreensão: "Quando pegamos valores de x mais próximos de 100 pela esquerda, percebe-se que f(x) cresce infinitamente".	I	2

A análise das respostas dos demais estudantes encontram-se no Apêndice D.

A seguir na Tabela 19 apresentamos a síntese da avaliação final do estudante 1(E-01), a síntese dos demais estudantes encontram-se no Apêndice D.

Tabela 19

AVALIAÇÃO FINAL Síntese do Desempenho do Estudante (E-01)					
P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	**Indicador Essencial do Problema**
nº 8	**5**	**4**	**5**	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	**2**	**2**	**2**	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

Conforme Tabela 19, o desempenho da avaliação final do conteúdo de limite do estudante (E-01) observou-se que o resultado foi muito bom. Este estudante demonstrou um bom desempenho no problema 8 (P-08), mas no problema 9 (P-09) pelas suas respostas demonstrou não compreender o problema e nem saber solucioná-lo.

Os problemas para a avaliação final (prova de lápis e papel) do conteúdo de Limite foram escolhidos de acordo com os objetivos para a análise da aprendizagem, e neste caso, sobre a aplicação de limites laterais e continuidade de funções, a fim de completar o conceito geral de limite.

A seguir apresentamos a Tabela 20 com o resultado final por conceitos do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas 8 e 9.

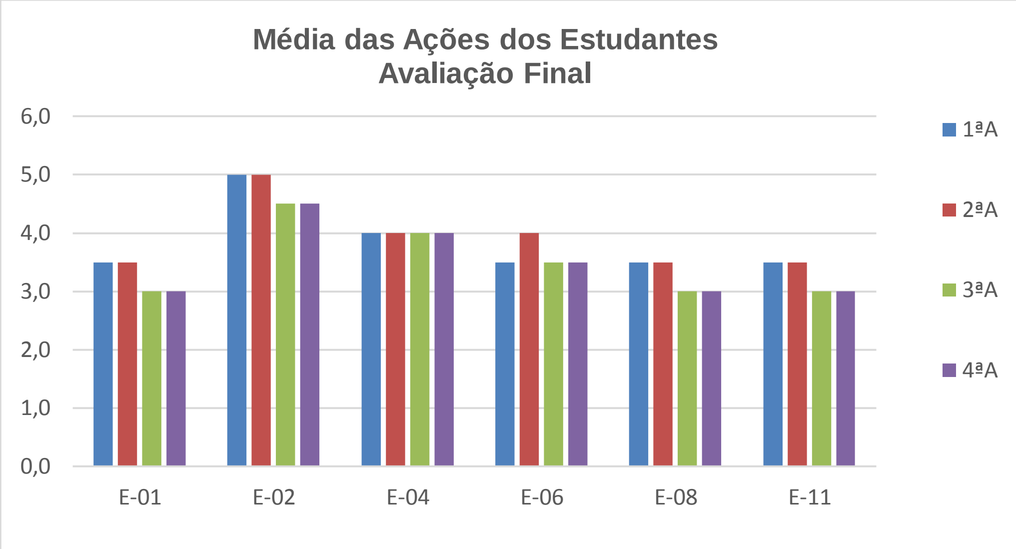
Tabela 67

AVALIAÇÃO FINAL								
	Problema 8				**Problema 9**			
	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
E-01	O	O	B	B	I	I	I	I
E-02	O	O	B	B	O	O	O	O
E-04	O	O	O	O	R	R	R	R
E-06	O	O	O	O	I	I	I	I
E-08	O	O	B	B	I	I	I	I
E-11	O	O	B	B	I	I	I	I

Quanto ao desempenho dos estudantes observa-se que no primeiro problema, que se tratava de modelos algébricos de vários tipos de funções reais (exponenciais, logarítmicas e racionais), os estudante tiveram um bom desempenho de modo geral, apenas dois estudantes (E-04 e E-06) conseguiram resolver todas as questões satisfatoriamente, atendendo ao objetivo do problema e alcançando o conceito máximo, os outros quatro estudantes alcançaram conceito máximo nas ações de “compreender o problema” e “construir o modelo matemático”, pois o problema requeria a compreensão sobre o conceito de continuidade, limites laterais e, desse modo os estudantes teriam que elaborar tabelas e gráficos representando cada função e, além disso, identificar se eram contínuas ou descontínuas e explicar sua interpretação.

Quanto ao segundo problema, trata-se de uma situação problema de médio nível de complexidade e abstração, que requeria mais a compreensão do que estava sendo solicitado no problema para posteriormente elaborar as tabelas para o cálculo dos limites laterais e, assim identificar a solução. Desse, modo, somente um estudante (E-02) obteve a compreensão e solucionou satisfatoriamente o problema, demonstrando com isto que assimilou satisfatoriamente o conceito de limite e continuidade de uma função. Apenas um estudante (E-04) obteve um desempenho regular, não conseguiu responder satisfatoriamente ao objetivo do problema, pois, não compreendeu o que estava sendo solicitado, o que pode ser percebido na sua resposta ao problema. Os demais tiveram um desempenho insuficiente, não compreenderam o problema e isto influenciou nas demais ações, mas também não efetuaram os cálculos conforme o conceito de limites laterais.

Gráfico 3



Observando o Gráfico e da média das ações dos estudantes da avaliação final, percebemos que somente um estudante (E-02) conseguiu um ótimo desempenho em duas ações: a ação de “compreender o problema” e a “ação de identificar e construir o modelo matemático” nos dois problemas analisados. Somente um estudante conseguiu um bom desempenho na resolução dos dois problemas atendendo satisfatoriamente às quatro ações com o conceito bom. Os outros quatro estudantes tiveram um desempenho regular em todas as ações nos dois problemas analisados.

5.4 A Análise das etapas da Assimilação da Aprendizagem Superordenada

As análises por meio das etapas estão classificadas a partir da sequência do desenvolvimento do processo de ensino que ocorreu em sala de aula. Considerando o pressuposto essencial da aprendizagem significativa: obter informação sobre o conhecimento prévio do estudante, foi proposto um pré-teste. Na elaboração do teste diagnóstico definiram-se os conceitos matemáticos abordados com base no conhecimento que seria apresentado – o conceito de limite – para tanto, buscou-se perceber se os estudantes possuíam conhecimento prévio suficiente e satisfatório sobre o conceito de função que é um conhecimento essencial para assimilação do conceito de limite.

Ausubel (1980) ressalta que a aquisição de novas informações depende amplamente das ideias relevantes que já fazem parte da estrutura cognitiva por isso, a aprendizagem significativa nos seres humanos ocorre por meio de uma interação entre o novo conteúdo e aquele já adquirido. Portanto, o resultado desta interação que ocorre entre o novo material e a estrutura cognitiva existente, dá origem a uma estrutura mais altamente diferenciada.

A motivação nas aulas atribuiu-se na forma de apresentar as situações pela professora e a resolução realizada pelos alunos durante o processo, quanto às explicações e resoluções da professora.

Destaca-se a relevância do planejamento das aulas fundamentado pela teoria da aprendizagem significativa em vista da aplicação da metodologia de resolução de problemas, temas que já foram referenciados na primeira seção deste trabalho. Desse modo, a partir da primeira etapa que foi fazer o diagnóstico sobre o conhecimento prévio dos estudantes e, mediante a análise dos resultados, foi organizado o assunto sobre função, os principais tipos de função e, principalmente sobre função afim e geometria analítica (equação da reta), para serem trabalhados em duas aulas que sucederam à aula após o pré-teste, visto que nesta aula a professora abordou as dificuldades dos estudantes na resolução dos problemas apresentados.

A etapa da aquisição do significado, para a aprendizagem receptiva significativa implica a aquisição de novos conceitos, mas exige tanto a disposição para a aprendizagem significativa como a apresentação ao estudante de material potencialmente significativo. Desse modo, o material de aprendizagem a ser apresentado para o estudante, deve ter um sentido lógico, ser de forma não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e substantiva (não literal), e que as novas informações possam ser relacionadas com as ideias básicas relevantes já existentes na estrutura cognitiva do estudante.

Observamos que houve o interesse e preocupação da professora com a seleção do material de aprendizagem, a escolha do livro texto que fosse compatível com a proposta de ensino e também a seleção das situações problemas a ser apresentadas inicialmente para os estudantes para a introdução do conceito de limite a partir da ideia intuitiva de limite através de problemas particulares: o “problema da tangente” e “o problema da velocidade”, pois a partir destes dois problemas os estudantes começariam a perceber a aplicação da ideia de limite em contextos diferentes, no caso do problema da tangente, um contexto matemático da geometria analítica e no caso do problema da velocidade, um contexto da Física.

Segundo Ausubel (1980, p 32) “a interação entre significados potencialmente novos e ideias básicas relevantes à estrutura cognitiva do aluno dá origem a significados reais e psicológicos”. Desse modo, a partir da aquisição do significado do conceito de limite, o estudante amplia cada vez mais seus conhecimentos matemáticos, abrindo-se um leque de possibilidades da aplicação desse conhecimento.

Analisando a prática da professora com relação à influência da exposição verbal nas aulas, os questionamentos elaborados tanto pela professora quanto pelos estudantes foram fundamentais para alcançar o objetivo da participação mais ativa dos estudantes. O fragmento transcrito (Quadro 24) refere-se a um episódio que mostra como ocorreu a introdução das ideias conceituais de limite na primeira aula prática deste contexto:

Quadro 24

Aula: 07 **Data**: 01/04/2013 **Assunto**: **O problema da tangente** (JAMES STWART, p.87) Abordagem teórica: método da ASP (Explanação verbal). Procedimentos: demonstração da resolução do problema com base na ASP **Obs**: a partir dos problemas anteriores os acadêmicos estavam mais perceptíveis as perguntas da professora, e iniciavam um processo de	**O problema da tangente** P: o que o problema pede? R1: *a equação da reta*. P: *Qual é a equação da reta tangente na curva y = x² [nesta equação]?* ?: *Momento de silêncio*. Ao realizar o esquema do problema a professora questionou novamente: P: *o que é preciso para determinar a equação da reta?* R1 *(dois alunos): dois pontos ou um ponto e o coeficiente angular*. P: *Como se descreve a equação geral da rata?* R1: *(dois alunos): y – y0 = (x – x0).* P: *quais as coordenadas de P?* ?; *Não foi possível processar a resposta.*

resposta consciente. **Legenda**: P: professora R: repostas. ?: atenção.	P: *O que acontece com o coeficiente angular?* R1: *se aproxima de 2;* R2: *vai ser um valor próximo de 2.* Novamente a professora retornou a perguntar: P: *qual é a equação dessa reta?* R1: *y= 2x – 1 (equação da reta).* P: *Como podemos identificar o limite neste problema?* R1: *é a inclinação da reta tangente.*

Durante as primeiras aulas observamos que dois estudantes, pela maneira de responder e questionar, demonstraram que estavam motivados para adquirir esse novo conhecimento, pela expectativa que o próprio assunto promove nos estudante de Matemática. Visto que a disciplina de Cálculo é um tanto temida pelos estudantes, pelo grande índice de reprovação dos estudantes e, também pelo grau de dificuldade, muitas vezes imposto por professores que não estão preocupados com um ensino da Matemática "mais humano". O que não é o caso da proposta de ensino que estamos observando.

Na etapa que se segue: de retenção do significado da ideia intuitiva de limite, a professora trabalhou com vários tipos de tarefas[20], incluindo folhas de exercícios, situações problemas contextualizadas, problemas sem textos (mais abstratos) que foram elaboradas com a preocupação de fazer com o estudante tivesse o máximo de autonomia possível para resolvê-las. Estas tarefas foram elaboradas de maneira a refletirem os procedimentos racionais da atividade mental dos estudantes. Nesta etapa, com aulas expositivas e práticas, a professora levou algumas vezes os estudantes aos laboratórios de informática e de matemática. No laboratório de informática para usar os computadores e trabalhar com exercícios, principalmente da aplicação de funções trigonométrica, em programas específicos de matemática, para a percepção do comportamento das funções seno e cosseno, o que não é possível de perceber com cálculos manuais sem o uso de equipamentos tecnológicos.

[20] Segundo Majmutov (1983, p. 147) as tarefas são agrupadas em: (1) tarefas que são características do processo de aquisição de conhecimentos e habilidades e, tarefas aplicadas para fixar o material estudado.

Este processo de assimilação sequencial de novos significados através dos vários problemas resulta na diferenciação progressiva do conceito de limite com o conseguinte refinamento dos significados e um aumento potencial para a criação de uma base para posterior aprendizagem significativa.

Segundo Ausubel (1980) quando os conceitos estão relacionados por meio de uma nova aprendizagem superordenada, surgem novos significados, e também significados conflitantes que podem ser resolvidos através da reconciliação integradora. Dessa forma, o professor desempenha um papel bastante relevante, de orientar e esclarecer dúvidas, bem como selecionar situações problemas que possam estimular o pensamento analítico e crítico dos estudantes, motivando-os ao esforço contínuo da aprendizagem para que possam fazer a transferência para novas situações problemas.

Nesta etapa a professora orientou para a aplicação da estratégia de resolução de problemas mediante a ESPL e, incentivava a cada problema apresentado e resolvido no quadro. Com relação a este método de ensino a professora, em uma das suas reflexões sobre esta experiência pedagógica fez um breve relato:

> *“Posso dizer que houve mudança na minha prática pedagógica após a intervenção, no sentido de dar mais atenção à forma como ocorre a aprendizagem, pois hoje para mim o ensino está muito mais vinculado a aprendizagem do que antes. Realizar a pesquisa e ao mesmo ser docente da disciplina, foi um desafio muito grande, eu tinha que ter os dois olhares, o de professora e de pesquisadora, entretanto, foi muito enriquecedor, pois houve muito cuidado com a organização do ensino e um olhar atento à aprendizagem dos estudantes. Não houve apenas a preocupação em passar os conteúdos e sim em verificar a forma como esses estudantes estavam internalizando esses conteúdos”* (Professora de Matemática do IFRR, 2013).

A universidade (escola) e o professor, naturalmente, não podem assumir a responsabilidade completa pelo aprendizado do estudante, este, deve também buscar uma participação completa através de um aprendizado ativo e crítico, tentando compreender e reter o que é ensinado, integrando novas informações, bem como as informações obtidas em experiências anteriores e, dar sua contribuição ao grupo de estudante do qual faz parte. Desse modo, espera-se que o estudante dedique um esforço necessário para dominar as dificuldades inerentes à assimilação dos novos conceitos, formulando questões pertinentes e envolvendo-se conscientemente na solução de problemas que lhe são dados para resolver.

Observamos que na fase formativa que envolve as cinco etapas da assimilação, observamos que a professora esforçou-se para aplicar os pressupostos pedagógicos da aprendizagem significativa (diferenciação progressiva e reconciliação integradora), mas conforme seu relato durante nossos momentos de reflexão pós-aula.

> “[...] não é tão fácil como parecia, a demanda de trabalho não permite um tempo necessário para pesquisar e selecionar as situações problemas para que trabalhemos esses princípios...” (Professora da disciplina de Cálculo do IFRR, 2013)

Contudo as atividades aplicadas de maneira detalhada foram sem dúvida um enorme diferencial no ensino de Limite e, além disso, a atitude da professora com relação aos estudantes, destinando a cada um, atenção e tempo para esclarecer dúvidas e motivá-los a continuar a prática de resolver os problemas, mesmo sem sua indicação ou cobrança. As atividades de situações problemas foram solucionadas pelos estudantes de maneira objetiva e clara, para análise dos dados. A estratégia da ESPL embora, muitas vezes implícita, proporcionou maior visibilidade dos conceitos relacionados, bem como as discussões que promoveram momentos de reflexão para os próprios alunos, quanto à importância da disciplina de Cálculo, vista até o momento como algo muito distante da realidade vivenciada.

Inicialmente as situações problemas foram trabalhadas com menor grau de abstração, para que os estudantes fossem pouco a pouco percebendo o conceito mais amplo de limite. Devido à complexidade do próprio conteúdo, cada vez mais exigia-se maior atenção e concentração para o tratamento dos diversos tipos de funções aplicados ao estudo de limite, tais como: função algébricas, função potência, polinomiais, trigonométrica, exponencial e logarítmicas. Na verdade, pelo que pudemos observar da prática da professora, apesar de seu receio em não atender aos princípios da aprendizagem significativa, o conteúdo de limite proporcionou um bom campo de estudo e da prática desses princípios (diferenciação progressiva e reconciliação integradora). E, a cada tema iniciado, a professora dedicava um tempo para introduzir um organizador prévio.

Para enfatizar a aplicação do princípio da diferenciação progressiva, em que os assuntos devem seguir uma hierarquia, vindo de cima para baixo, considerando os níveis de abstração, generalização e abrangência. Quanto à reconciliação integradora é facilitada nas aulas expositivas se o professor propiciar (com ou sem o uso de material didático adequado) a explicação das semelhanças e diferenças entre o conhecimento que se está apresentando e o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do estudante, esclarecendo o máximo possível as dúvidas, eliminando as confusões sobre os conceitos matemáticos pertinentes ao assunto envolvido.

Na etapa de diferenciação adicional da ideia inicial pudemos observar que havia poucos estudantes participando ativamente nas aulas, destes estudantes dois mostraram-se bem motivados desde o início, talvez por gostarem bastante de matemática como ele mesmo relatam algumas vezes em situações mais descontraída "...*Adoro calcular...rsrsrs*...", um estudante falou a respeito do outro: "...*ah, esse aí vive calculando,... adora matemática*", mas também pudemos observar que alguns estudantes gostavam de estudar matemática mas, segundo eles mesmos "... "*meu ensino médio foi péssimo, não aprendi nada...[...] e ainda agora tô sofrendo pra aprender matemática*". Como havia poucos estudantes participando ativamente, a professora pôde dar mais atenção a cada um deles. Contudo, havia alguns estudantes que trabalhavam durante o dia e isto comprometia o tempo que tinham pra se dedicar aos estudos. Mas, de uma maneira geral observamos que durante esta etapa, em que os assuntos tratados de limite eram mais abstratos e mais complexos eles se interessaram mais, as aulas tornaram-se mais participativas, talvez por dominarem mais o assunto tinham mais facilidade de elaborar questionamentos e também responder aos questionamentos da professora.

Na etapa da retenção posterior a final do processo de assimilação da aprendizagem superordenada, a aula foram mais práticas do que expositivas, a professora apresentava vários problema envolvendo as leis de limite, problemas envolvendo funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas e, desse modo, o conhecimento do conceito de limite estabilizava-se na estrutura cognitiva dos estudantes. Os estudantes já se sentiam mais aptos a resolverem as questões mais abstratas sem a ajuda da professora e, ficavam felizes com seus resultados, isto foi observados nas filmagens, suas expressões de contentamento quando acertavam alguma questão mais complexa, de maior grau de dificuldade. Nesta etapa, o conhecimento fica mais estável, os estudantes já são capazes de compreender mais as abstrações e fazer generalizações. O conhecimento começa a se automatizar, pois já está havendo uma perda gradual da dissociabilidade das ideias particulares. O estudante já está apto a assimilar o conceito formal de limite em sua forma mais abstrata.

Na etapa final, apenas seis estudantes estavam participando do teste final. O detalhamento da análise das questões selecionadas para a análise, do teste final, encontra-se no Apêndice “E”. Observou-se que os estudantes tiveram um bom aproveitamento da unidade de Limite, dois estudantes obtiveram conceito regular, provavelmente porque não se esforçaram o suficiente para trabalhar com as questões mais abstratas do cálculo de limite.

Na última etapa da aprendizagem superordenada acontece o esquecimento das ideias particulares, pois elas se reduzem ao conhecimento mais geral, agora, do conceito de limite. Desse modo o estudante já é capaz de compreender e explicar a definição de limite em sua forma mais abstrata, pois o conhecimento aqui deverá estar mais estabilizado e, dependendo do tempo dedicado a todo o processo de ensino de um conteúdo, o conhecimento trabalhado também fica automatizado.

5.5 A Análise da Aplicação da Estratégia de Situações Problemas (ESPL)

Durante o desenvolvimento das aulas sobre limite foi possível perceber o interesse crescente dos estudantes e sua aprovação no uso do método do sistema de quatro ações, pois eles passaram a participar mais ativamente das aulas fazendo questionamentos e se empenhando nas atividades de situações problema em limite. Alguns estudantes mostraram-se com mais dificuldade na aprendizagem da definição formal de limite, contudo, observou-se que esses mesmos estudantes que tiveram dificuldade na aprendizagem e baixo desempenho nesta fase, procuraram melhorar, tornando-se mais assíduos e pontuais e, participativos nas resoluções de problemas, alcançando melhores índices de desempenho na avaliação final (segundo relato da professora da disciplina).

Quanto à aplicação do sistema de quatro ações de situações problemas no conteúdo de limite observou-se que os estudantes não conheciam esta estratégia, o que foi confirmado por eles quando questionados a respeito. Inicialmente demonstraram muita dificuldade de expressarem suas análises de forma escrita e, em linguagem matemática, principalmente. De que maneira se pôde perceber isto, pela maneira confusa de escrever as justificativas das soluções e, porque eles demoravam e às vezes não conseguiam responder. Outra maneira de perceber foi através dos diálogos em sala de aula. Embora a metodologia de resolução de problemas não seja algo novo como proposta curricular, para todos os níveis de estudo, os estudantes tiveram muita dificuldade de interpretar os problemas e fazer uso de procedimentos para a solução.

Nos primeiros problemas resolvidos pelos estudantes observou-se que a maioria dos estudantes não seguiu nenhuma estratégia de resolução de problema e, quando relacionavam os dados, colocavam-nos sem recorrer a uma ordem de importância. Outro ponto observado foi que os estudantes pareciam não ter consciência da importância de relacionar os elementos essenciais que fazem parte do problema, alguns deles demonstraram não ter organização nos procedimentos de resolução.

Nos três problemas que foram selecionados do pré-teste, somente em um era solicitado a construção de um modelo matemático, que no caso era uma função, mas a maioria dos estudantes encontrou dificuldade para encontrar o modelo matemático para solucionar o problema.

No outro problema que envolvia o conhecimento de conceito de função afim e geometria analítica e, também a identificação e construção de um modelo matemático (que era uma função afim) eles demonstraram maior dificuldade na resolução. O problema continha um gráfico de duas funções, uma função linear e outra racional e, provavelmente isto também foi motivo de dificuldade para os estudantes, entretanto, não deveria ser, pois no semestre anterior esses mesmos estudantes haviam tido aulas da disciplina de geometria analítica e matemática básica e, pelos menos até o semestre em que se encontram já teriam tido revisão dos principais conteúdos estudados no ensino médio.

Pelos menos quatro a cinco estudantes participavam das discussões em sala de aula, de vez em quando eles conversavam sobre as dificuldades encontradas no estudo da matemática. Eles disseram que gostavam de estudar, um deles disse "*gosto de fazer os cálculos, mas não gosto de escrever*", outro disse: *"tenho dificuldade de escrever como resolvi o problema*" ele de fato mostrou bastante dificuldade em justificar as soluções encontradas respostas, ele quase não escrevia em sala de aula, embora a professora passasse bastante conteúdo no quadro.

Com relação à estratégia de resolução de problemas através do sistema de quatro ações, os estudantes melhoram na maneira de resolver os problemas, passaram a ter mais organização, mais clareza e mais eficiência nas descrições das soluções encontradas. Observou-se também maior preocupação com maneira de se expressar fazendo uso da linguagem matemática.

A contribuição da estratégia usada na resolução de problemas do conteúdo de limite foi efetivada com o uso da teoria da aprendizagem significativa, pois se observou uma assimilação gradativa do conceito de limite, culminando na assimilação do conceito mais geral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este trabalho sinto-me gratificada pela oportunidade que tive de ampliar meus conhecimentos sobre a teoria da aprendizagem significativa, visto que durante minha formação acadêmica apenas obtive informações superficiais que foram consolidadas somente neste estudo mais aprofundado, a partir de obras originais do autor da teoria, David Ausubel (1980). De modo que este estudo proporcionou-me subsídios para analisar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite.

Para Ausubel (1980) a essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo estudante através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Isto significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do estudante, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição.

Considerando o pressuposto essencial da aprendizagem significativa: obter informação sobre o conhecimento prévio do estudante, na análise dessa pesquisa foi possível identificar que a maioria dos estudantes apresentou ter conhecimento prévio insuficiente sobre o conceito de função que é um conhecimento essencial para assimilação do conceito de limite. Este foi o principal problema que se identificou da didática do conteúdo de limite, ou seja, as lacunas que ficam na aprendizagem dos estudantes ao longo de toda a Educação Básica, e neste caso, o conceito de função, em que grande parte dos estudantes não tem a maturidade no conhecimento matemático que já deveria possuir ao passar pelos níveis de ensino até chegar ao nível superior. Desse modo, conclui-se que este é um dos obstáculo para assimilação do conceito de limite.

Analisando a prática docente com relação à influência da exposição verbal nas aulas, os questionamentos elaborados tanto pela professora quanto pelos estudantes foram fundamentais para alcançar o objetivo da participação mais ativa dos estudantes nas resoluções de problemas.

A Teoria da Aprendizagem Significativa, aporte teórico desse estudo, destaca que, quando os assuntos são programados de acordo com a diferenciação progressiva, as ideias mais gerais e mais inclusivas da disciplina são apresentadas em primeiro lugar e desse modo, serão progressivamente diferenciadas, em termos de detalhes e especificidade. Segundo Ausubel (1980) esta ordem de apresentação, presumivelmente corresponde à sequência natural de aquisição da consciência e sofisticação cognitiva, quando os seres humanos são espontaneamente expostos ou a um campo completamente desconhecido do conhecimento ou a um ramo desconhecido (limite) de um corpo de conhecimento familiar (Matemática).

O planejamento do processo de ensino do conteúdo de limite de uma função real foi realizado atendendo aos pressupostos pedagógicos dessa teoria e a estratégia do sistema de quatro ações da ESPL. A professora preocupou-se em se aprimorar no estudo da teoria da aprendizagem significativa demonstrando o compromisso e a responsabilidade em aplicar os pressupostos pedagógicos: organizadores antecipatórios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora da teoria. O entusiasmo em ensinar matemática por parte da professora foi uma característica considerada importante no processo de ensino aprendizagem, e o fato de haver um relacionamento harmonioso e respeitoso entre os sujeitos, proporcionou um ambiente favorável à aprendizagem.

Observou-se que em vários momentos o entusiasmo da professora e seu o gosto pela matemática, influenciou o comportamento dos estudantes para uma participação mais ativa no estudo do conhecimento matemático. Conclui-se, a partir das observações e, por experiência da própria pesquisadora, que a professora teve domínio e competência para ensinar o conteúdo de limite, devido ao seu conhecimento matemático e sua experiência como professora no ensino superior.

Segundo Ausubel (1980, p. 416) o entusiasmo, a imaginação ou a excitação do professor em relação ao assunto que leciona é outra variável que está significativamente relacionada com a eficiência do professor. E, inclusive que o professor deveria constituir uma variável importante no processo de aprendizagem, pois do ponto de vista cognitivo, deveria fazer diferença, o quão abrangente e coerente é sua compreensão do assunto que leciona.

Desse modo, deu-se ênfase à prática docente, pois a análise do processo de ensino e aprendizagem leva-se em consideração, em sala de aula, tanto o professor, o estudante, quanto o material apresentado ao estudante. De acordo com D'Ambrósio (1996, p. 90) a função do professor é a de um associado aos alunos na consecução da tarefa, e consequentemente na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo.

A avaliação da aplicação da resolução de problemas do conteúdo de limite foi realizada a partir da análise de nove problemas selecionados nas avaliações (diagnóstica, formativa e final) mediante as ações: compreender o problema, identificar e/ou construir um modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução. Quanto às ações observadas nas resoluções dos problemas pelos estudantes, estes apresentaram melhor desempenho nas ações de “compreender o problema” e “solucionar o modelo matemático”. A ação de compreender o problema apesar de influenciar as demais ações, não foi fundamental para garantir que o estudante solucionasse o modelo e descrevesse sua interpretação da solução encontrada, o que dependia do seu conhecimento matemático. Desta forma, as ações em que os estudantes demonstraram ter maior dificuldade para executar são as ações: “construir o modelo matemático” e “justificar a solução encontrada”.

Muitas dessas dificuldades foram eliminadas por meio das aulas expositivas da aprendizagem receptiva significativa, com a apresentação dos temas e problemas a partir de uma hierarquia, considerando os níveis de complexidade, abstração e generalização, trabalhando-se as diferenças e semelhanças entre os exemplos e situações problemas, esclarecendo-se dúvidas e eliminando conflitos e contradições de acordo com os pressupostos pedagógicos da diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

A partir da aplicação da metodologia de resolução de problemas mediante o sistema de quatro ações, os estudantes passaram a elaborar as resoluções com mais organização e critério, esforçando-me mais no uso da linguagem matemática e na descrição dos procedimentos adotados. Adotaram uma postura mais crítica e se aprofundaram mais para poder responder aos questionamentos tanto orais quanto escritos.

Quanto ao desempenho nas avaliações, o que se mostrou relevante não foi tanto o resultado percebido pelos valores ou conceitos atribuídos às respostas aos problemas analisados, mas, sim ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes ao longo do processo de assimilação do conceito de limite, e pela satisfação que demonstraram em muitas ocasiões quando entendiam ou resolviam algum problema.

Com base no exposto, conclui-se que o processo de ensino do conteúdo de limite, realizado mediante a metodologia de resolução de problemas com a prática pedagógica fundamentada na teoria da aprendizagem significativa teve grande relevância no desenvolvimento cognitivo dos estudantes para a assimilação e a aprendizagem significativa do conceito de limite.

Acredita-se que este estudo baseado na análise do processo de ensino e aprendizagem de uma sequência didática pode contribuir de modo relevante para o aprimoramento e um repensar da prática docente no ensino da Matemática. Desse modo, Junto a este estudo criou-se um modelo de avaliação do processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite, fundamentado na aprendizagem receptiva significativa e na metodologia de resolução de problemas, mediante o sistema de quatro ações da ESPL, que se acredita servirá como referência para aplicação em sala de aula e novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1978.

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Paralelo Editora Ltda, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN: Orientações curriculares para o ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. [Tradução Elza F. Gomide]. 2ª. Ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

D' AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 1ª a 5ª Série. 12ª ed. Ática 2002.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio Século XXI**: o minidicionário da língua portuguesa. 5 ed. ver. ampliada – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas Técnicas para o Trabalho Científico**: explicitação das Normas da ABNT. 17. Ed. – Porto Alegre: Dáctilo Plus, 2013.

GADOTTI, Moacir. **Concepção dialética da educação**: um estudo introdutório. 7ª ed. – São Paulo: Cortez: Autores associados, 1990. – (Coleção educação contemporânea).

GHEDIN, Evandro. **Territórios epistemológicos do Ensino de Ciências**. Volume I e II. Boa Vista: Mestrado em Ensino de Ciências - UERR, 2012.

GHEDIN, Evandro; FRANCO, Maria Amélia Santoro. **Questões de método na construção da pesquisa em educação**. 2. Ed. – São Paulo: Cortez, 2011.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **A avaliação da Aprendizagem: componente do ato pedagógico**, 1ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisa, amostragem e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados.** São Paulo: Atlas, 2000.

MENDOZA, Héctor José Garcia. **Estudio del efecto del sistema de acciones em el proceso del aprendizaje de los alumnos en la actividad de situaciones problema en matemática en la asignatura de álgebra lineal, en el contexto de la Facultad Actual de la Amazonia**. Tese (Doutorado em Psicopedagogia) - Universidad de Jaén (UJAEN), Espanha, 2009.

MENDOZA, Héctor José Garcia, et al **. La teoria de la atividad de formación por etapas de las acciones mentales em la resolución de problemas**. Revista Científica Internacional "*Inter Sciencie Place*", Indexada ISSN 1679-9844, www.intercienceplace.org. Ano 2, nº09, set.- out., 2009.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de Aprendizagem.** 2. ed. ampl - São Paulo- EPU, 2011.

______. **Metodologias de pesquisa em ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco Antônio; ROSA, Paulo Ricardo da Silva. **Uma introdução à pesquisa quantitativa em ensino**. – Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2013.

OLIVEIRA, Gladys Maria de Souza[21]. **A aplicação da teoria de formação das etapas mentais no ensino da matemática na resolução de problemas**. **In**: SILVA, Josias Ferreira da Silva; MELO, Nildete Silva de (org.). **"Da Ciência à Cidadania**" – II Anais do Projeto Novos Talentos CAPES/UERR. Rorainópolis/RR, 2013. ISBN Nº 978-85-61924-05-8.

OLIVEIRA, Maria Marley de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 3ª ed. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

OLIVEIRA, Martha Khol. **Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento Um Processo Sócio-histórico**, São Paulo: Scipione, 1997 – Coleção (Pensamento e Ação no Magistério).

PAIS, Luiz **Carlos. Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PALANGANA, Isilda Campaner. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky:** a relevância do social. São Paulo: Summus, 2001.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, Juan Ignácio; CRESPO, Miguel Ángel Gómes. **A aprendizagem e o ensino de ciências: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico**. Tradução Naila Freitas. – 5. ed. – Porto Alegre: Artmed, 2009.

RICHARDSON, Roberto Jarry et al. (e colaboradores). **Pesquisa Social: métodos e técnicas**. 3 ed. – 11. reimp. – São Paulo: Atlas, 2010.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino da Matemática hoje** – enfoques, sentidos e desafios. Tradução Antônio de Pádua Danesi. São Paulo: Ática, 2010.

SAMPIERI, Roberto Hernández Sampieri; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Pilar Baptista. **Metodología de La Investigación**. 4ª ed. – México: McGraw-Hill Interamericana, 2006.

SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos. **O ensino da matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Armed, 2006.

[21] Mesma autora desta dissertação. Houve mudança de nome de Gladys Maria de Souza Oliveira para Gladys Maria Bezerra de Souza.

SANTOS, Flávia Maria Teixeira dos; GREGA, IIeana María. **A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias**. 2ª ed. Revisada. – Ijuí: Unijuí, 2011 – 440. – (Coleção educação em ciência).

SILVA, Josias Ferreira da. **Métodos de Avaliação em /educação Física no Ensino Fundamental**. São Paulo. [s.n], 2010.

STENBERG, Robert J. **Psicologia Cognitiva**; tradução Anna Maria Dalle Luche, Roberto Galman; revisão técnica José Mauro Nunes, São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STEWART, James. Cálculo, volume 1. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

STRAUSS, Anselm; GORBIN, Juliet. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teorias fundamentadas. Tradução Luciane de Oliveira da Rocha. – 2 ed. – Porto Alegre: Artmed, 2008.

TALÍZINA, Nina. **Psicologia do Ensino**, Moscou: Progresso, 1988.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alex N. **Linguagem Desenvolvimento e Aprendizagem**. Tradução Maria da Penha Vila Lobos – São Paulo: Ícone, 2006.

APÊNDICE A – RELATÓRIO DE OBSERVAÇÃO E TRANSCRIÇÃO DE FILMAGENS

Apêndice A – Relatório de Observação E Transcrição de Filmagens

Quadro 01

Primeira aula: Programação para recepção dos estudantes e demais estudantes do IFRR.

Aula: 01 – Data: 11/03/2013

Aplicação do pré-teste (6 situações problema)

Aula: 02 – Data: 14/03/2013

Demonstração da Resolução do Pré-teste com comentários da professora sobre sua resolução pelos estudantes

Aula: 03 – Data: 18/03/2013 - Assunto: Funções (apresentação do organizador antecipatório)

Ocorrência em sala de aula:

Ao serem estimulados pela professora da disciplina a opinar sobre o grau de dificuldade da atividade (pré-teste) os estudantes responderam: "não foi fácil resolver"; "resolvi quase todos, faltou somente a última questão"; "não consegui", "não consegui lembrar". Dando prosseguimento a professora fez a demonstração da resolução do problema 1. A professora comentou sobre a importância da linguagem matemática ao realizarem a análise inicial para resolução de um problema, ou seja, a identificação dos dados do problema. O motivo desta fala foi para chamar a atenção na forma de justificar a solução de um problema ou de efetuar um cálculo, para que não haja dúvidas no momento da correção das respostas dadas. "Na determinação dos dados, o que demonstra que determinada função está crescendo?" Perguntou a professora. Resposta: "o sinal de subtração (-)". ..."e em quanto tempo a produção vai se esgotar? Continuou perguntando a professora. Resposta: "8 anos, conforme os dados da função". A professora prosseguiu com os questionamentos sobre que tipo de função era abordado no problema. Resposta obtida: "função linear decrescente". Problema 2: a professora questionou: "como vocês percebem o comportamento da função neste problema?" Para responder esta questão os estudantes chegaram ao consenso de que primeiramente deveria se encontrar a equação da reta, ou seja, o modelo matemático $y - y_0 = m(x - x_0)$ usando o determinante e, posteriormente fazer a substituição de p e q na equação. Observação: sem conseguir encontrar a equação da reta um dos estudantes afirmou não ter finalizado a resolução deste problema. Problema 3: A professora perguntou: "quem conseguiu resolver este problema?", dois estudantes responderam: "não respondi essa"; "resolvi todos" e os demais permaneceram calados. Observação: um Estudante questionou sobre encontrar a solução do problema usando a regra de três. Resposta da professora: "encontrar o resultado sim, porém este seria um mecanismo para resolver um problema em particular". Os demais seriam resolvidos de forma linear.

A professora entregou aos estudantes mais uma relação de atividades contendo 4 (quatro) problemas para serem resolvidos em sala de aula. Tipo de aprendizagem significativa: aprendizagem receptiva através de aula expositiva e com resolução de problema, aplicando a estratégia da ESPM. De repente surge uma pergunta "Qual o objetivo da disciplina de Cálculo?" foi uma das alunas, mas não foi possível captar a resposta da professora [...] Iniciando a segunda lista de atividades: a professora perguntou, "qual é o modelo matemático da situação problema 1?" ... "E quais são os dados do problema?". Os estudantes responderam: "Cidade A [Iluminação = R$ 4,00 e 0,40Kwh]" e "Cidade B [Iluminação = R$ 4,00 e 0,40Kwh]". Os estudantes apresentaram ter compreendido que para encontrar a solução do problema era necessário aplicar os dados do problema na equação. Posteriormente, a professora perguntou se havia possiblidade de identificar se a Cidade A e Cidade B, ou seja, se as duas cidades chegariam ao mesmo consumo. Os estudantes responderam que sim, pois se poderia igualar as equações e obter o resultado do valor de x. Desse modo o problema foi solucionado, com a participação da professora estimulando os estudantes para participarem e resolverem o problema.

O segundo problema da lista envolveu o conteúdo de área da figura geométrica. Neste problema a professora ressaltou que área é a função da dimensão, ou seja, existe uma relação de dependência. Neste exemplo os estudantes ficaram atentos sem realizar nenhum questionamento, faziam gestos de confirmação com a cabeça. Chegaram à conclusão do problema concordando com a professora que se tratava de um eixo de simetria que corta uma parábola ao meio. No terceiro problema: o assunto abordado foi o envolvimento de potência. A professora enfatizou a construção do modelo matemático

a partir de situações problema para poder generalizar a ideia e possibilitar a aplicação em outras situações. Observação: houve um questionamento de uma aluna que interpretou o problema de maneira rápida e, desse modo encontrou a solução usando apenas cálculo mental. Quanto a este questionamento, a professora interferiu informando que a principal ideia para a solução não seria simplesmente encontrar a resposta do problema, mas construir um modelo matemático. Outro Estudante afirmou que este problema pode ser resolvido do jeito que se calcula juros compostos.
O quarto problema envolve o mesmo modelo do problema 3 (três). No entanto os resultados são diferentes.
A professora deu um aviso aos estudantes: “revisar o conteúdo de funções de primeiro grau, segundo grau e logarítmica”. Os estudantes ficaram surpresos, mas não questionaram e realizaram a atividade no tempo de aula previsto.

Aula: 04 – Data: 21/03/2013 - Assunto: tipos de funções
Prática de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de funções.
[...]

Aula: 05 e 06 - Data: 23/03/2013 (sábado) - Assunto: Atividade no laboratório de matemática.
No primeiro momento foi exposto o conceito de limite inserido em um problema envolvendo tangente. Questionamento da professora: “como encontrar a equação da reta?” “O que é preciso fazer para determinar o coeficiente angular?” Não obteve resposta dos estudantes, (contudo, os Estudantes já tinha visto geometria analítica no semestre anterior), a professora explicou a solução do problema fazendo uma explanação oral e escrita e os estudantes assistiram atentamente. Após ter demonstrado como se encontra a equação da reta, a professora retomou o questionamento inicial sobre o conceito de limite e o objetivo desta disciplina. O que se entende por limite? Como definir um ponto? Como e qual o procedimento de se resolver problemas na concepção dos estudantes? Diante destes questionamentos foi solicitado aos estudantes que descrevessem estas respostas para que posteriormente fossem analisadas pela professora como uma forma de se extrair dos estudantes o conceito prévio sobre limite dos mesmos.

Aula: 07 – Data: 25/03/2013 - Assunto: Abordagem geral de Cálculo I.
Nesta aula a professora iniciou com um problema denominado problema da tangente (do livro texto “Cálculo 1” de JAMES STWART, p.87), após escrever o problema no quadro, voltou-se para os estudantes perguntando: ‘o que o problema pede?” alguns estudantes responderam: a equação da reta (curva), observou-se por esta pesquisadora que a partir dos problemas anteriores os estudantes estavam mais atentos às perguntas da professora, e pareciam mais precisos em suas respostas. Diante da resposta dos estudantes, a professora buscou novamente ressaltar quais eram os dados do problema. Alguns estudantes responderam enquanto outros ficaram em silencio observando. “Qual é a equação da reta tangente na curva $y = x^2$ [nesta equação]?” Ao realizar o esquema do problema a professora questionou novamente, “o que é preciso para determinar a equação da reta?” Resposta (dois estudantes): “dois pontos ou um ponto e o coeficiente angular”. estes dois estudantes estavam sempre respondendo corretamente ou bem próximo da resposta, estavam sempre participando das aulas. Alguns estudantes mantinham-se sempre silenciosos, não se manifestavam. “Como se descreve a equação geral da reta?” Perguntou a professora. Resposta (dois estudantes): y – y0 = (x – x0) (falando). Desenvolvendo o esquema foi encontrada a equação da reta deste problema. Um dos estudantes mostrou ter resolvido o problema por aproximação. A professora continuou fazendo mais questionamentos: quais as coordenadas de p? para este, não foi possível ouvir direito a resposta. “O que acontece com o coeficiente angular?” Resposta: “se aproxima de 2”; “vai ser um valor próximo de 2”. Então, chegaram à conclusão de que o limite do problema seria conforme o modelo matemático: Lim *mpq* = *m* (quando p tende a q). Novamente a professora voltou a perguntar ‘qual é a equação dessa reta?” [aqui percebe-se a tentativa da professora da aplicação da diferenciação progressiva] digo tentativa, pois ela ainda estava se apropriando da teoria da aprendizagem significativa.

Y= 2x – 1 (equação da reta). “*Então o limite*: é a inclinação da reta tangente”, concluiu.

Aula: 08 – O problema da tangente. Data: 01/04/2013, segunda-feira
A professora iniciou dialogando sobre o problema do tanque da aula anterior, os estudantes e a professora leram o problema [...]. A discussão sobre este problema iniciou com as perguntas do próprio problema, onde os estudantes deveriam encontrar a inclinação da reta. A professora pergunta: o que “o problema está solicitando?” Resposta: “achar o coeficiente angular em p=q?” alguém

respondeu.

Inicialmente os estudantes montaram o gráfico [...], depois que alguns estudantes informaram ter conseguido fazer o gráfico, a professora fez o esboço do gráfico no quadro, observou-se que neste momento havia estudante com dúvida quanto à demonstração do gráfico, se seria uma reta ou uma parábola, mas um dos estudantes informou que por meio do determinante seria possível interpretar e identificar uma inclinação da drenagem da água do tanque. Prosseguindo a professora questiona sobre a quantidade de inclinações contidas no problema, neste momento os estudantes estavam atentos [mostraram-se indecisos em responder], a professora esperou um pouco, mas não obteve resposta. Assim, a professora fez a identificação das curvas no esboço contido no quadro. O segundo questionamento da professora sobre a inclinação da reta, a inclinação passando pela tangente [...]. Mais uma vez a professora questionou “O que representa essa inclinação?” e depois “Como estimar pelo gráfico ou como fazer?” não houve resposta, os estudantes ficaram em silêncio [...]. “Compreenderam?” a professora perguntou novamente, “*mais ou menos*” alguns estudantes responderam.

Observação da pesquisadora: Até aqui, observando os estudantes presentes nesta aula percebeu-se que eles demonstravam não saber interpretar o problema e, apesar da professora já ter trabalhado com eles o mesmo assunto eles ainda não conseguiam transferir para um problema diferente. O conhecimento prévio desses estudantes mostrava-se insuficiente para eles acompanharem o raciocínio da professora que se esforçava para explicar de forma que eles pudessem entender. Talvez, um dos motivos seja porque ainda não estivessem se acostumado com a câmera de filmagem e a nossa presença.

Posteriormente foram apresentados mais 5 (cinco) problemas a serem resolvidos pelos estudantes. O problema dos batimentos cardíacos [...]. [...] foi dado um tempo para os estudantes responderem aos exercícios e tirar as dúvidas diretamente com a professora. Ao tentarem resolver o problema dos batimentos cardíacos os estudantes construíram o esboço do gráfico, usando os dados da tabela contidos na questão [...]. Compreender o problema: “Dá pra estimar pela média dos pontos?” Foi um questionamento da professora, mas um Estudante perguntou se existia outro procedimento para encontrar a resposta do problema. A professora respondeu: Os valores que dados no problema é para poder encontrar o ponto que aproxima ou identifica a taxa de batimentos no ponto estimado. “Como se calcula a média aritmética...???” surgiu essa questão elementar de um estudante. Uma aluna solicitou a ajuda da professora informando não ter entendido o problema, a professora explicou diretamente para a mesma [*esta aluna não está matriculada na turma, frequenta as aulas esporadicamente, portanto não participou das aulas anteriores, e por isso não conseguia acompanhar os demais*].

Observação da pesquisadora: os estudantes não conseguiam resolver, sozinhos, o problema, mesmo assim tentaram responder. Demonstraram não ter compreendido o problema para encontrar a solução, encontraram dificuldades para encontrar a estimativa das taxas, acredita-se que mesmo com as orientações da professora, os estudantes ainda não a habilidade de interpretar e nem o conhecimento prévio em sua estrutura cognitiva para compreender e encontrar a solução do problema.

A professora pediu aos estudantes, na próxima aula no dia (08/04/2013) trazer os problemas resolvidos.

Aula: 09 – Data: 04/04/2013, quinta-feira

Introdução da atividade a ser desenvolvida e apresentação do problema, neste caso um modelo matemático para explorar a ideia de limite. A professora inicia a aula lembrando dos problemas abordados na aula anterior, informando que nesta aula serão calculados o limite [como surgiram? como se calcula o limite dos casos anteriores, a partir do limite da função]. Serão abordados exemplos gerais de funções polinomiais [problema], onde será analisado o comportamento desta função. Professora: Como é o modelo de um gráfico de uma função polinomial? Resposta (dois estudantes): “uma parábola”. Professora: Ao questionar sobre a posição da concavidade eles responderam: “para cima”.

Observação da pesquisadora: Neste momento, os estudantes responderam porque a pergunta ´se sobre um assunto que eles estudam desde o 9º ano. passaram a interagir mais que nas aulas anteriores, as repostas estão coerentes e os próprios estudantes já estão mais acostumados com a câmera. Novamente a professora questiona: o que acontece com essa equação, quando se aproxima de 2? Como essa curso se comporta? Ela existe no ponto? Sem resposta: Resposta:

Comportamento dos estudantes: Os estudantes observam atentamente a explicação da professora, acompanham a resolução no caderno. Quanto à expressão facial demonstraram gestos de que estariam assimilando o assunto ou operação realizada pela professora.

Um Estudante interage respondendo os questionamentos da professora com respostas objetivas e corretas. Os conceitos são demonstrados e verbalizados pela professora de modo que os estudantes observam e tentam ou respondem as perguntas quando solicitadas. Com relação à pergunta sobre qual seria o limite na questão em estudo os estudantes responderam que *4 seria o limite próximo*. Para retenção do assunto pelos estudantes, a professora faz uma conexão [lembrete] com os modelos encontrados nas situações problemas anteriores, com isso os estudantes expressam ter compreendido sinalizando com a cabeça [somente os que estavam mais atentos a aula].

Com base nos casos gerais: a professora apresentou três gráficos com limites que se aproximam pela direita e pela esquerda. A explicação seria para encontrar o limite e verificar o comportamento da função.

A professora questionou sobre quais seriam os elementos que faziam parte da função f(a), que nesta questão é o mesmo L.

Exemplo 2: (caso particular) neste exemplo os estudantes acompanharam atentamente, porem após uns 3 minutos ainda não haviam demonstrado aspectos de compreensão, porém após a identificação do domínio pela professora foi que eles iniciaram a interação na construção do gráfico e da tabela de valores. A pergunta estão compreendo? Feita pela professora. Três responderam que *sim*. Prosseguindo a professora fez outro questionamento: O domínio, qual é o domínio do exemplo 3? Os estudantes responderam que o 0 não poderia ser [3 estudantes], então todos os números com exceção do 0.

Sete estudantes presentes nesta aula acompanham a explicação [explanação verbal e demonstração escrita no quadro] da professora, com exceção de apenas um que estava desatento. Exemplo 4: função trigonométrica.

Fazer uma análise do comportamento da curva no gráfico. Exemplo 5: função (função de Havzait). Na aula expositiva os estudantes ficaram atentos e respondendo algumas questões pertinentes, como qual é o domínio? Os estudantes responderam todos os reais. Análise do comportamento da função próximo ao ponto, ou seja, os pontos da vizinhança.

No entanto quando a professora fez a explicação do tipo de função que não existe limite, em uma mesma função que tem comportamento diferente, houve uma mudança nas expressões faciais dos estudantes [assustados ou estarrecidos]. Pois, acredita-se que os mesmos ainda não haviam estudado este tipo de comportamento de uma função, sendo observado que este seria mais um novo conhecimento sendo apresentado, a estrutura cognitiva daqueles estudantes. Quantos as análises: Correlação com os problemas das aulas anteriores, o problema da velocidade. Análise conclusiva dos problemas e operações realizadas na aula: a professora fez uma ressalva sobre a ideia de limite a partir da formação subordinativa de casos particulares para o geral segundo abordagem da teoria da aprendizagem significativa. Segundo as etapas das ações mentais os estudantes encontram-se na fase de compreensão, embora já tenha realizado várias atividades e visto várias demonstrações, observa-se pelas respostas dos questionamentos da professora que os mesmos ainda encontram-se em processo de construção da ideia de limite.

Aula: 10 – Data: 08/04/2013
Assunto: Limite de uma função de uma variável real.

Introdução: Foram demonstrados três gráficos de funções, a primeira com função cúbica com aproximação de 1 pela direita e pela esquerda. Professora: Qual é a conclusão sobre o questionamento da aproximação? Qual é o comportamento? O estudantes observaram que a aproximação estava acontecendo para próximo de 5 pela direita e pela esquerda. Então, com isso concluíram que o limite de g(x) quando x tende a 3 é 5. Professora: O que significa dizer que o intervalo está aberto? Resposta: “não passa pelo ponto”, percebe-se que esta resposta foi fortalecida pelo conceito já formado de intervalos estudados anteriormente pelos estudantes que responderam o questionamento. Professora (afirmativa) “nem sempre o limite é o ponto”.

Outro exemplo: Estudantes: “Seis, porque seis é o último ponto” [por tentativa de ensaio e erro, não se demonstrou segurança da aluna, quando respondeu a questão, de modo que a resposta estava errada]. Acadêmico: “não tem limite” (*lembrei da aula passada*). Após a tentativa da colega, o outro respondeu ressaltando que havia esquecido quando o limite apresentava esta característica. Sobre as dúvidas: Dayane (sobre o gráfico)

Professora: o gráfico pode ser feito da mesma forma que os estudantes podem [???] Professora (Indagação): “é o valor de f(x) quando pegamos valores de x pela esquerda e pela direita”, a professora alerta como forma de correção da ideia “Não pode dizer que são valores de f(x)”. Estudantes: “só existe limite se os pontos laterais forem iguais”. Diante desta resposta a professora reforçou a ideia do Estudante, afirmando que só existe limite se os pontos laterais forem iguais, nesta situação.

Professora: qual o motivo de preencher as tabelas?

Daiane: “para analisar o comportamento do gráfico e vê quais os valores”. Também pode-se observar pela resposta desta aluna, que já apresenta um discernimento mais elaborado sobre o comportamento das funções quando de atribui valores a partir de uma tabela.

Aula: 11 – Assunto: Data: 11/04/2013

Aula: 12 – não houve descrição. Assunto: Data: 15/04/2013

Não houve descrição das aulas, as observações foram focadas nas filmagens.

Aula: 13 não houve descrição. Assunto: Data: 18/04/2013

Os exercícios versam sobre o cálculo dos limites a partir das leis dos limites, o cálculo de limite a partir de estimativas e observação do gráfico (tabela de valores), comparação entre os valores da tabela e o cálculo usando as leis, a demonstração do limite usando a definição épsilon e delta.

Descrição da Participação dos Estudantes
Os estudantes participaram resolvendo as atividades propostas organizados em grupos. - a aula transcorreu durante 100 min, Comentário da Pesquisadora sobre a aula (Atividades e participação dos estudantes) Observação: Os estudantes (E-05) e (E-08) em um grupo de estudo calcularam o limite dos exercícios por meio da tabela de valores e posteriormente inseriram os dados do problema em um software de computação algébrica – GEOGEBRA realizando um comparativo.

Alguns estudantes iniciaram as resoluções aplicando as leis de limite estudadas (por substituição dos valores), sempre que os estudantes encontravam o limite, a professora questionava sobre a interpretação do resultado encontrado, alguns estudantes com maior assiduidade, já conseguem fazer corretamente a interpretação dos resultados. Os estudantes encontraram dificuldade em uma das questões de uma função que não possui o limite no ponto, o limite só existia na lateral esquerda do ponto analisado, ou seja, não havia a possibilidade de encontrar o resultado por substituição direta na função, era necessário fazer uma análise de valores a esquerda do ponto, a explicação da professora foi dada a partir de atribuição de valores nas vizinhanças do ponto pela esquerda.

Aula: 14 e 15 - Data: 20/04/2013 – Teste final de limite.

APÊNDICE B - RESULTADO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Apêndice B - Resultado da Avaliação Diagnóstica

Apresentaremos primeiro cada um dos problemas selecionados na fase diagnóstica para a análise do desempenho dos estudantes e na sequência a cada problema colocaremos o resultado das análises descritivas de todos os estudantes que participaram da pesquisa na ordem alfanumérica (E-01 a E-11), observando que dos onze estudantes que começaram na disciplina, dois desistiram e outros não participaram assiduamente, portanto, apenas os estudantes E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11 foram considerados participantes da pesquisa, totalizando seis estudantes.

A seguir apresentamos o problema 1 (P-01) que tem como o*bjetivo* que o estudante demonstre ter compreendido o problema calculando o prognóstico solicitado, identificando o tempo em que a produção deve parar, construindo o gráfico da função e, por fim justificando a solução encontrada.

<u>PROBLEMA 1</u>

Problema (P-01):
Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz um número de unidades de determinado artigo por ano; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função $f(x) = 8000 - 1000x$ representa os dados da tabela abaixo.

x (anos)	1	2	3
y (produção)	7000	6000	5000

Responder:

a) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.
b) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.
c) Represente graficamente a função f(x).

Apresentamos no Quadro 2 as ações que os estudantes deveriam realizar na resolução do problema 1. Este quadro deu suporte para ser feita a análise das respostas dos estudantes.

Quadro 2

MODELO PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 1 (P-01) – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	
CATEGORIAS	**AÇÃO QUE O ESTUDANTE DEVE REALIZAR**
Compreender o problema.	O estudante deverá identificar que se trata de uma função decrescente a partir dos dados do problema descritos na tabela e que precisa calcular o prognóstico da produção para mais dois anos subsequentes (4 e 5)
Identificar o modelo matemático dado no problema e construir o gráfico a partir do modelo e dos dados fornecidos no problema.	O estudante deve identificar que x faz relação com os anos, e a variável y com a produção e, resolver $f(x) = 8000 - 1000x$. O modelo da função afim deverá ser representado da seguinte forma: $f(x) = -ax + b$. Elaborar o gráfico da função (decrescente), sendo uma reta não vertical com base nas coordenadas (x, y), respectivamente, anos e produção.
Solucionar o modelo matemático dado no problema	O estudante deverá usar o modelo da função afim para determinar o prognóstico dos próximos dois anos, isto é, $f(4)$ = 4000 e $f(5)$= 3000; e chegar à conclusão que produção vai parar em $f(x) = 0$; o gráfico da função é decrescente, construído nas coordenadas: (1, 7000); (2, 6000); (3, 5000); (4, 4000); (5, 3000); (6, 2000); (7, 1000) e (8, 0).
Justificar a solução encontrada.	O estudante deverá justificar a solução encontrada usando adequadamente a linguagem matemática.

A seguir apresentaremos nas tabelas de 1 a 6 o resultado das análises descritivas do desempenho dos estudantes no pré-teste, realizadas mediante o sistema de quatro ações da ESPL.

Problema 1: Estudante 1 (E-01) – Análise da resolução.

Tabela 1

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTUAÇÃO**
Compreender o problema	O estudante determina parcialmente as condições do problema, pois não entendeu que o problema solicitava o prognóstico para os dois anos subsequentes 4 e 5. Não demonstrou entender que se tratava de uma função decrescente e por isso não construiu o gráfico corretamente. Desta forma, define o objetivo de forma implícita e parcial, visto que teve a compreensão sobre o período em que a fábrica se manterá funcionando, pois realizou também os prognósticos para os anos 6, 7 e 8, concluindo que “a partir do 8º ano não haverá mais produção”.	R	3

Identificar o modelo matemático.	O estudante E1 identifica que $f(x)$ = 800 -1000x é o modelo matemático e que está relacionado com o prognóstico da produção, e o valor de x com os anos. Faz a aplicação parcial no modelo, pois calcula apenas um dos prognósticos solicitados. Constrói o gráfico de forma crescente, quando o modelo apresenta uma função decrescente.	R	3
Solucionar o modelo matemático	O estudante E1 soluciona parcialmente o problema, pois não fez o cálculo do prognóstico da produção para o 4º ano, fazendo somente o prognóstico para o 5º ano. Construiu o gráfico de forma equivocada (crescente), não observando que o gráfico representa uma função decrescente.	**R**	**3**
Interpretar a solução	Apresentou uma breve justificativa escrevendo: “como há um decréscimo constante por ano, para os próximos dois anos a produção é de 3000 artigos”. Mas a resposta correta seria: 7000 artigos, ou seja, o resultado de$f(4) + f(5)$.	R	3

Problema 1: Estudante 2 (E-02) – Análise da resolução
Tabela 2

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 DO ESTUDANTE (E-02)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTO**
Compreender o problema	O Estudante determina as condições do problema, pois utiliza a sequência dos valores de x disponível na tabela de dados e a função para realizar o prognóstico dos próximos dois anos: 4 e 5. Compreende o que é solicitado no problema, pois conclui que se trata de uma função decrescente.	O	5
Identificar o modelo matemático.	O estudante identifica que f(x) está relacionado com o prognóstico da produção, e o valor de x com os anos. Identifica que a função f(x) é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois faz relação com o conceito geral da função afim $f(x) = ax + b$.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Aplica o modelo matemático para calcular o prognóstico para os anos 4 e 5. A partir do modelo dado constrói o gráfico solicitado corretamente encontrando uma função decrescente traçando a reta nos pontos: (0, 8000), (1, 7000), (2, 6000), (3, 5000), (4, 4000), (5, 3000), (1, 7000), (2, 6000), (3, 5000) e (4, 4000), (5, 3000), (6, 2000), (7, 1000), (8, 0) até chegar aonde a produção vai parar. No entanto, traçou a reta iniciando no ponto $(0, 8000)$ até o $(8, 0)$.	**O**	**5**
Interpretar a solução	O estudante explica cada etapa realizada esboçando sua compreensão da solução encontrada. Dá a resposta de forma completa para a questão, pois ao esboçar o gráfico acrescenta um ponto a mais, pois determina x=0. Conclui-se que o estudante (E-02) justificou adequadamente a solução encontrada.	O	5

Problema 1: Estudante 4 (E-04) – Análise da resolução
Tabela 3

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 DO ESTUDANTE (E-04)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTO**
Compreender o problema	O estudante determina as variáveis e o objetivo do problema, pois utiliza a sequência dos valores de x da tabela fornecida no problema e a função para determinar o prognóstico dos próximos dois anos (4 e 5). com o resultado do prognóstico, que *“a produção vai caindo a cada ano 1000 unid*”. Observa-se que o estudante não explica claramente este comportamento.	O	5
Identificar o modelo matemático.	Identifica o modelo matemático que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas respostas utiliza os termos “*em 4 anos*” e “*em 5 anos*”, o resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Explicou que os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$ “*continuam caindo*” a cada ano que passa. Construiu o gráfico de maneira correta trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(8, 0)$ e ressalta a função $f(x) = 8000 - 1000x$, próximo à reta.	**O**	**5**
Interpretar a solução	Explica de modo sucinto cada ação realizada e esboça compreensão e habilidade para relacionar os dados como o objetivo do problema. Apresenta resultados satisfatórios.	O	5

Problema 1: Estudante 6 (E-06) – Análise da resolução
Tabela 4

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 DO ESTUDANTE (E-06)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTO**
Compreender o problema	O estudante demonstra compreender o problema quando determina as condições e o objetivo, pois identifica o modelo matemático e usa os dados do problema para responder satisfatoriamente às questões complementares.	O	5
Identificar o modelo matemático.	O estudante usa o modelo matemático da função afim dado no problema e completa a tabela também dada no problema calculando os prognósticos para os dois anos seguintes (4 e 5). Faltando elaborar melhor o modelo do gráfico.	B	4
Solucionar o modelo matemático	Identifica que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos “anos” e “produção”. Identificou os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$. Construiu o gráfico cartesiano de maneira parcialmente correta, trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(6,\ 2000)$, mas não	**B**	**4**

	identificou os eixos.		
Interpretar a solução	Justificou descrevendo, mas de modo sucinto cada ação realizada.	B	4

Problema 1: Estudante 8 (E-08) – Análise da resolução
Tabela 5

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 1 DO ESTUDANTE (E-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTO**
Compreender o problema	O estudante (E-08) apresenta que compreendeu o problema quando identifica os prognósticos dos próximos dois anos (4 e 5), obtendo como resultado $f(4) = 4000$ e $f(5) = 5000$. Identifica o ano que a produção será encerrada no 8º ano e esboça o gráfico nos pontos. O estudante define o objetivo do problema.	O	5
Identificar o modelo matemático.	O modelo matemático é dado no problema, mas a partir da compreensão do estudante ele executa as ações e responde satisfatoriamente às questões complementares a partir do modelo da função afim apresentado.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Fez os cálculos para os prognósticos dos dois anos seguintes (4 e 5) mediante $f(4)$ até $f(8)$ e o encerramento no 8º ano. Esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000), (2, 6000), (3, 5000), (4, 4000), (5, 3000), (6, 2000), (7, 1000)$ e $(8, 0)$, nomeando os eixos $y(prod)$ e $x(anos)$.	**O**	**5**
Interpretar a solução	Apresentou resultados completos, porém não justifica claramente as ações e os resultados encontrados.	B	4

Problema 1: O estudante (E-11) não realizou a resolução deste problema.

<u>PROBLEMA 2</u>

O problema (P-02) foi selecionado com o objetivo de analisar a habilidade para construir o modelo matemático de uma função a partir dos dados disponíveis no problema. Portanto, a solução deste problema é encontrada a partir da ação principal que é construção do modelo.

PROBLEMA 02: O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sendo que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

a) Encontre um modelo matemático que defina a poupança P em função de seu salário x;
d) Para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal?
e) Justifique suas respostas.

A seguir no Quadro 3 modelo para análise das respostas ao problema 2 (P-02) da avaliação diagnóstica.

Quadro 3

MODELO PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 2 (P-02) – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA		
CATEGORIAS	**AÇÕES ESSENCIAIS**	**AÇÕES PARA EXECUTAR**
COMPREENDER O PROBLEMA	Compreender a aplicação do conceito de função usando duas variáveis. Determinar os dados e suas condições identificando as variáveis apresentadas no problema.	Identificar a variável referente ao salário x; o valor do aluguel R$ 120,00 e a variável P que é a poupança.
CONSTRUIR O MODELO MATEMÁTICO.	Determinar as variáveis e incógnitas; Nomear as variáveis com suas unidades de medidas e construir o modelo matemático.	Responder à questão (a) Encontre um modelo matemático que define a poupança P, em função do salário x. Solução: x = 120 + $\frac{3}{4}$ x + P →x – $\frac{3}{4}$x = 120+ P $\frac{4x-3x}{4}$ = 120 + P → $\frac{x}{4}$ = 120 + P Logo, P = $\frac{x}{4}$ – 120 é o modelo solicitado.
SOLUCIONAR O MODELO MATEMÁTICO.	Usar o modelo matemático encontrado para solucionar o problema.	Responder a questão (b) Para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal? Se P = 240, aplica-se no modelo acima: 240 = $\frac{x}{4}$ – 120 → 4 (240 + 120) = x x = 4 x 360 → x = 1.440,00. Logo, o salário mensal é R$ 1.440,00.
INTERPRETAR A SOLUÇÃO	Explicar a resolução mediante o modelo matemático encontrado.	O estudante deverá justificar as respostas dadas às duas questões.

A seguir apresentamos nas tabelas de 6 a 10 o resultado das análises das respostas dos estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06 e E-08) ao problema 2 (P-02) do pré-teste.

Problema 2: Estudante 1 (E-01) – Análise da resolução
Tabela 6

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 2 DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	Na leitura do problema o Estudante faz a relação dos seguintes elementos: x para salário, $R\$\ 120{,}00$ para aluguel, $3/4x$ para manutenção e deduz que o valor que o funcionário poupa, equivale a $1x/4$. O estudante demonstra que compreendeu o problema, mas esqueceu do valor do aluguel, ou não considerou relevante.	B	4
Construir o modelo matemático	O Estudante constrói o modelo matemático como: P= $\frac{4x}{4}$ - $\frac{3x}{4}$ = P = $\frac{1x}{4}$, porém esquece o valor do aluguel R\$120,00 que deve compor o modelo, ou seja, seu modelo matemático para a solução do problema ficou incompleto.	**R**	**3**
Solucionar o modelo matemático	O Estudante não soluciona satisfatoriamente a questão (b) porque o modelo matemático apresentado para a questão (a) está incompleto. Seus cálculos de acordo com sua escrita: " P= 240, 00 => P = 1x/4 => 240,00 = x/4 => x = 960,00". Se o modelo estivesse completo o resultado correto do cálculo seria R\$ 1.440,00 (salário mensal).	**R**	**3**
Interpretar a solução	O estudante (E-01) faz a seguinte justificativa: "de acordo com o problema *pode-se perceber que o empregado dividiu seu salário (x) em quatro partes, ou seja, 4x/4. Tendo um gasto com manutenção de 3x/4. Então, subtrai-se com o total, encontrando o que se poupou (no caso x/4 do salário). Então, pode-se definir um modelo que define a poupança como P = 1x/4*". Entretanto, esqueceu-se de utilizar um dos elementos (o valor do aluguel).	R	3

Problema 2: Estudante 2 (E-02) – Análise da resolução
Tabela 7

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 2 DO ESTUDANTE 2 (E-02)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) identifica os elementos do problema, nominando cada um $x = salário$, $Aluguel\ = R\$\ 120{,}00$, $man =\ 3x/4$, resto para a poupança. Observa-se que o mesmo define o objetivo do problema.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina claramente as variáveis e nomina cada uma delas, quando descreve: x = salário, aluguel = R\$ 120,00, man = 3x/4 e poupa o resto. A partir dos elementos extraídos do problema, o estudante encontra o modelo matemático que define a poupança em função do salário: $\mathbf{P(x)} = x - (120 + \frac{3}{4}x)$ $\mathbf{P(x)} = \frac{x}{4} - 120$	**O**	**5**

Solucionar o modelo matemático	A partir do modelo matemático encontrado o estudante demonstra um exemplo para comprovar que através do modelo é possível determinar o valor que será poupado pelo empregado. Soluciona satisfatoriamente a questão (a) que é a elaboração do modelo e a questão (b) quando determina o salário que o empregado deve ganhar para poupar. $240 = \frac{x}{4} - 120$ $960 = x - 480$ $x = 960 + 480$ $x = 1440$	O	5
Interpretar a solução	A descrição do estudante (E-02) permite observar sua compreensão do problema de acordo com o enunciado "*o empregado ganha valor x, mas sabemos que gata ¾ do salário com manutenção, e então, sobra ¼, de onde ele paga o aluguel e o que sobra é poupado*".	O	5

Problema 2: Estudante (E-04) – Análise da resolução
Tabela 8

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 2 DO ESTUDANTE 4 (E-04)

CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA** **PRÉ-TESTE**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O Estudante (E-04) ler o problema e extrai os dados organizando da seguinte forma: $P = poupança = P(x)$. Determinando diretamente que $120 + 3x/4 + P = x$. Por meio da organização dos dados, observar-se que, determina as condições e responde ao o objetivo do problema quando organiza os dados em um modelo matemático para encontrar o resultado.	O	5
Construir o modelo matemático	Constrói de maneira objetiva o modelo matemático a partir dos dados do problema iniciando com $P = x - 3x/4 - 120$ e finalizando $P(x) = x/4 - 120$.	**O**	**5**
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona satisfatoriamente o modelo matemático como se segue: "240 = $\frac{x}{4}$ – 120 => 360 = $\frac{x}{4}$ => x = 1440, então o salário deve ser de R$ 1440,00".	**O**	**5**
Interpretar a solução	O estudante justifica a solução encontrada da seguinte forma: *"o total do salário é a soma de tudo que ele gata e poupa, então a soma de ambos é o total do salário, logo, podemos encontrar poupança (P) em função do salário (x) isolando P. para poupar R$ 240, 00 precisa aplicar na função encontrada 'modelo' poupança em função do salário*". Desse modo, conclui-se que o estudante respondeu satisfatoriamente ao objetivo do problema demonstrando ter conhecimento do conceito de função afim e de como se constrói o modelo.	O	5

Problema 2: Estudante (E-06) – Análise da resolução
Tabela 9

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 2 DO ESTUDANTE 6 (E-06)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O Estudante (E-06) identifica os dados do seguinte modo: salário = x reais, aluguel = 120,00, manutenção = 3x/4 e poupança = 1x/4. Não determina explicitamente as questões solicitadas e não consegue encontrar o modelo matemático que o leve a responder satisfatoriamente ao objetivo do problema.	I	2
Construir o modelo matemático	*O Estudante constrói um modelo matemático incompleto, pois não considera o valor do aluguel. Apenas menciona* "P = $\frac{1}{4}$ x", mas não identifica como o modelo matemático solicitado (questão (a)).	**I**	**2**
Solucionar o modelo matemático	O modelo encontrado pelo estudante estava incompleto o que influenciou numa solução também incompleta conforme seus cálculos: P = $\frac{1}{4}$ x => 240 = $\frac{x}{4}$ => x = 960. Se seu modelo matemático fosse adequado e completo, teria encontrado o valor correto para o salário que seria R$ 1440,00.	I	2
Interpretar a solução	Não elaborou nenhuma descrição dos procedimentos para solucionar o problema e nem a justificativa para a solução encontrada.	I	1

Problema 2: Estudante 8 (E-08) – Análise da resolução
Tabela 10

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 2 DO ESTUDANTE 8 (E-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) não identifica os elementos do problema, mas faz as identificações de forma implícita. Não apresenta nenhuma organização na sequência dos cálculos e nem identifica o modelo matemático.	I	2
Construir o modelo matemático	O estudante não identificou o modelo matemático, mas apresenta o que se subtende ser o modelo: $P(x) = 3x/4 - 120$, porém inadequado e incompleto para responder satisfatoriamente ao objetivo do problema.	**I**	**2**
Solucionar o modelo matemático	O estudante não identificou o modelo matemático, fez cálculos aleatórios, sem nexo e sem ordem, " 4x120=480" e " $\frac{3}{4}$ → 120 = 360,00". Como resposta à questão (b) escreveu apenas: "960,00". Ou seja, sua resposta é incompleta e insatisfatória para atender ao objetivo do problema.	**I**	**2**
Interpretar a solução	O estudante faz somente uma breve justificativa afirmando "*Como ele gasta 4/3 de seu salário, pagando R$ 120,00 de aluguel, logo seu salário é de R$ 480,00*".		2

	O que não corresponde ao objetivo do problema e reflete compreensão e conhecimento insuficientes dos conceitos matemáticos requeridos para a resolução do problema.	I	

PROBLEMA 3 (P-03)

Este problema tem um nível de complexidade superior em relação aos dois primeiros problemas. Além da elaboração do modelo matemático, busca-se observar se o estudante é capaz de fazer uma análise mais complexa e com isto efetuar os cálculos para encontrar a solução do problema.

Problema 3: Duas plantas da mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas, desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pelo modelo matemático y = $\frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desse gráfico está apresentado na figura 5.

Responda:

c) Qual o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura?

d) Explique a sua resposta.

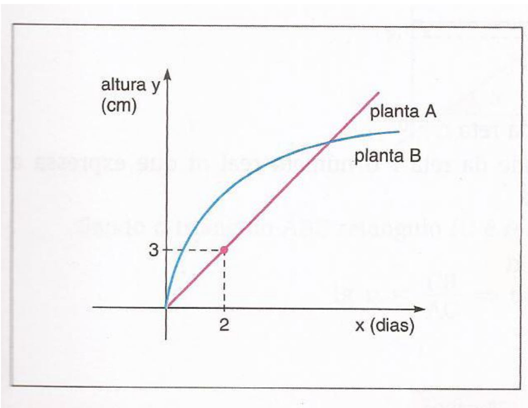


Figura 5.

Apresentamos a seguir no Quadro 4 o modelo para análise das respostas dos estudantes ao problema 3 (P-03).

Quadro 4

MODELO PARA ANÁLISE DO PROBLEMA 3 (P-03) – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA		
CATEGORIA	**AÇÕES ESSENCIAIS**	**AÇÃO PARA EXECUTAR**
COMPREENDER O PROBLEMA	Ler e extrair os elementos desconhecidos; Identificar os conceitos que são tratados no problema;	Identificar a função que representa a reta no ponto $(2, 3)$ a qual indica o crescimento da planta A (o problema não dá esta função); como saber se o modelo é uma função afim? Qual tipo de função afim. Aqui o aluno deverá mostrar que precisa calcular a taxa de variação e usar a equação da reta para isto. O problema dá o modelo do crescimento da planta B (função racional) e o período de 10 dias em que ocorreu a observação sobre o crescimento das duas plantas.
IDENTIFICAR O MODELO MATEMÁTICO	Analisar o modelo matemático dado no problema; Construir o modelo matemático da função que representa a planta A	Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: determinar os pontos P_1 e P_2: $P_1(2, 3)$ e $P_2(0, 0)$; o modelo da equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ da “Planta A”, nos pontos P_1 e P_2. Construir o modelo da função que representa o crescimento da planta A, substituindo os pontos na equação da reta $3 - 0 = m(2 - 0)$, para determinar a taxa de variação, ou seja, o valor de m. Logo o valor de m é $\frac{3}{2}$. O modelo matemático para a planta A é uma função linear f(x) = $\frac{3x}{2}$.
SOLUCIONAR O MODELO	Solucionar o modelo da função da Planta A em função da Planta B	Solucionar o modelo: Determinar a taxa de variação do crescimento da Planta A, sendo $m = \frac{3}{2}$, aplicar o coeficiente da função afim $f(x) = ax + b$, aplicando no ponto, temos: $f(x) = \frac{3}{2}x + b$, se $b = 0$, logo, obtêm-se um modelo de função linear para a Planta A: $f(x) = \frac{3}{2}x$ ou $y = \frac{3}{2}x$. Após encontrar o modelo da função que representa a reta da planta A, substitui-se o valor de y na equação da Planta B, $y = \frac{24x - x^2}{12}$, para encontrar o valor do crescimento de ambas as plantas resolvendo, $\frac{3x}{2} = \frac{24x - x^2}{12} \leftrightarrow 36x = 48x - 2x^2 \leftrightarrow \frac{12x}{2} = x^2 \leftrightarrow$ $x^2 - 6x = 0$, resolvendo a equação incompleta do 2º grau, temos as raízes $x' = 0$ e $x'' = 6$. Concluímos então, que o valor real de $x = 6$

		corresponde ao dia em que as plantas terão a mesma altura, pois substituindo tanto na função da Planta A, quanto na da Planta B, se obtém 9 cm de altura. $\frac{3}{2} . 6 = 9$ e $\frac{24.9-9^2}{12} = 9$.
INTERPRETAR A SOLUÇÃO	Explicar a resolução do problema mediante o modelo dado e construído.	Explicar como encontrou a solução para o problema, ou seja, quais conceitos e relações foram usados para encontrar a solução. Aqui o estudante poderá registrar suas dificuldades.

A seguir apresentamos nas tabelas de 11 a 13 a análise das respostas dos estudantes (E-01, E-02 e E-04) ao problema 3 (P-03). Os demais estudantes não participaram da resolução deste problema.

Problema 3: Estudante 1 (E-01) – Análise da resolução
Tabela 11

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 3 DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) relacionou os dados do problema como se segue: “a) 10 dias A= (2,3); B = y = $\frac{24x-x^2}{12}$. Na folha da prova, onde estava escrito o problema ele elabora alguns cálculos, mas a escrita está ilegível na cópia da prova.	R	3
Construir o modelo matemático	O estudante começa esboçando YA=YB → x = ? Mas, parou aí. Deixou um grande espaço em branco (talvez pra fazer os cálculos).	I	2
Solucionar o modelo matemático	Na folha da prova, onde estava escrito o problema percebe-se que o estudante escreveu alguns cálculos, mas a escrita está ilegível na cópia da prova. E, na folha de rascunho escreveu: a) $Y_A = Y_B$ => X =?	I	2
Interpretar a solução	O Estudante descreve "o crescimento da planta A é dado por uma reta crescente, para todo x(dias) um aumento em y(altura), A planta B” [...] mas, não conclui seu raciocínio..	I	2

Problema 3: Estudante 2 (E-02) – Análise da resolução
Tabela 12

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 3 DO ESTUDANTE 2 (E-02)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) identificando os pontos dados $(2{,}3)$ e $(0{,}0)$ e aplica na fórmula y = $\frac{24x-x^2}{12}$ para encontrar o valor de y. Observa-se pelo desenvolvimento dos cálculos que o estudante compreendeu satisfatoriamente o problema, pois determina suas condições, iniciando com a aplicação dos pontos dados no problema para encontrar a equação da reta que representa o ponto de interseção em que as plantas atingem a mesma altura.	O	5
Identificar o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, como também os pontos dados no problema, identifica e identifica o modelo para calcular o ponto de interseção de crescimento quando as plantas A e B atingirem a mesma altura. Faz a aplicação dos pontos na equação geral da reta. Constrói o modelo a partir dos pontos dado, fazendo uso geral do modelo da equação da reta.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O Estudante não faz nenhuma descrição dos procedimentos, mas demonstra organização na resolução conforme abaixo: a) (2,3) (0,0) – 6 dias – 9 cm de altura 3 – 0 = m(2 – 0) => 3 = 2m => m = 3/2 => 0= $\frac{3}{2}$.0+b B = 0 =>. $\frac{3}{2}$x = $\frac{24x-x2}{12}$ => 36x = 48x – 2x² => 2x² + 36 –48x =0 $2x^2-12x=0$: 2 => x² - 6x = 0 , a=1, b= -6 Δ = (-6)² - 4.1.0 => Δ= 36, => x = $\frac{6\pm 6}{2}$ => x'= 6 e x"=0 (substituindo na equação): y = $\frac{3}{2}$x => y = $\frac{3}{2}$. 6 => y= 18/2 => y= 9 Encontra o valor de y e consequentemente o valor da altura das plantas, e responde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5
Interpretar a solução	O estudante (E-02) explica sua resposta da seguinte maneira: "de acordo com o enunciado, as plantas nasceram no mesmo dia e foram tratadas com adubos diferentes, apresentaram gráficos diferentes para a relação de crescimento. No entanto, a reta que representa estas funções se tocam em um dado instante, apesar de ser uma do 1º grau e a outra do 2º, este ponto representa o dia em que as plantas estão com a mesma altura. Para sabermos as coordenadas desse ponto basta *igualar as funções,* encontrando o	O	5

	dia, e depois substituir esse valor em uma das funções para sabermos a altura". Através de sua explicação pode-se perceber sua compreensão e seu conhecimentos dos conceitos matemáticos envolvidos na resolução deste problema.		

Problema 3: Estudante 4 (E-04) – Análise da resolução
Tabela 13

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO PROBLEMA 3 DO ESTUDANTE 4 (E-04)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O Estudante (E-04) identifica os dados do problema fazendo a seguinte abordagem: $P1\ (2{,}3)$ e $P2\ (4{,}6)$ Planta A e y= $\frac{24x-x^2}{12}$,Planta B. Observa-se que o estudante determina as condições do problema quando classifica os dados da Planta A e B, e faz relação com a equação geral da reta ($m = \Delta y/\Delta x = 3/2$). O estudante define o objetivo do problema.	O	5
Identificar o modelo matemático	O estudante identifica as variáveis. Determina os pontos referentes à Planta A. A partir dos pontos $P1\ (2{,}3)$ e $P2\ (4{,}6)$ encontra o modelo matemático da equação da reta $y - y\_0 = m(x - x\_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - 2)$, desse modo determina a função (linear) da Planta A f(x) = $\frac{3x}{2}$ No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Determina os parâmetros matemáticos necessários para identificar as variáveis. Faz uma identificação objetiva das equações das Plantas A e B. A partir dos pontos $P1\ (2{,}3)$ e $P2\ (4{,}6)$ aplicando a $m = \Delta y/\Delta x = 3/2 \Rightarrow y - y\_0 = m(x - x\_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - 2)$, desse modo determina a equação da Planta $A = y = 3/2\,x$.No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B. A partir do modelo matemático encontrado, encontrando uma equação para a Planta A, e posteriormente iguala com a equação dada da Planta B.A partir das duas equações o Estudante faz o seguinte procedimento de resolução: $3x/2 = (24x - x^2)/12$ $48x - 2x^2 = 36x$ $-2x^2 + 48x - 36x = 0$ $2x^2 - 12x = 0$ $2x(x-6) = 0$ $2x = 0 \Rightarrow x' = 0$ $x - 6 = 0 \Rightarrow x'' = 6$	O	5
Interpretar a solução	Extrai claramente os dados do problema que são significativos para a solução. O Estudante determina o momento em que as plantas atingiram a mesma altura, fazendo a ressalva, $A = B = 9$ metros (*bastam substituir x = 9 nas duas equações*). Então		5

	em 06 dias A e B vão ter a mesma altura depois de nascidas. O Estudante descreve: *"analisando o gráfico vimos que a Planta (A) cresce a cada 2 dias 3 metros de altura, ou seja, a altura está em função do tempo. Primeiramente, analisei que em 4 dias ela vai estar com 6 metros de altura, a partir deste ponto pode encontrar a função que é a altura em função do tempo. Como o crescimento da Planta B é y=(24x- x²)/12 de acordo com o enunciado, então para termos a altura de A igual a de B, basta igualarmos as duas funções"*.	O	

Problema 3: Estudante 6 (E-06) – Não fez nada, apenas deixou um grande espaço em branco.

Problema 3: Estudante 8 (E-08) – Fez uma tentativa de resolução da equação do segundo grau, mas não desenvolveu satisfatoriamente o algoritmo usado e, não mencionou nenhum modelo matemático, desse modo, estes dados mostraram-se insuficiente para atender o objetivo do problema.

SÍNTESE DO DESEMPENHO NA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

A seguir apresentaremos nas tabelas 114 a 18 a síntese do desempenho dos estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06 e E-08) na avaliação diagnóstica, com análise descritiva geral considerando o sistema de quatro ações da ESPL.

Tabela 14

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-01)					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Indicador da Ação Essencial do Problema**
nº 1	3	3	3	3	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	4	3	3	3	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	3	2	2	2	Compreender os conceitos de função afim e de uma função racional. Determinar a taxa de variação e encontrar um modelo matemático a partir da função afim para solucionar o problema.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

A partir das análises apresentadas do desempenho do estudante (E-01) vamos fazer uma análise das quatro ações de cada problema: observou-se que o estudante desenvolveu todas as ações do problema (P-01) de maneira regular, pois não atendeu satisfatoriamente ao objetivo do problema, o que implica que seu conhecimento não foi suficiente para aplicar os conceitos de função afim. No problema (P-02), demonstrou na primeira ação que compreendeu parcialmente o objetivo do problema. Entretanto, seu conhecimento matemático não foi suficiente para solucionar o problema, o que gerou um resultado incompleto e um desempenho regular. No problema (P-03), todas as ações estão incompletas, possivelmente o estudante não tinha o conhecimento requerido para solucionar o problema ou não conseguiu lembrar o suficiente para elaborar alguma resolução satisfatória.

Tabela 15

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-02)					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Indicador da Ação Essencial do Problema**
nº 1	5	5	5	5	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	5	5	5	5	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	5	5	5	5	Compreender os conceitos de função afim e de uma função racional. Determinar a taxa de variação e encontrar um modelo matemático a partir da função afim para solucionar o problema.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

Fonte: Adaptado de Mendoza, 2013.

O desempenho do estudante (E-02) demonstrado na Tabela 11, logo no primeiro problema evidenciou habilidades para aplicação do conceito de função, as ações essenciais foram solucionadas corretamente, porém, não conseguiu construir o gráfico corretamente e, consequentemente a solução do problema. Já nos problemas P-02 e P-03, o estudante realizou completamente todas as ações, fazendo uso das aplicações matemáticas conforme os modelos das funções, alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, destaca-se como suficiente o conhecimento do estudante E-02 para assimilar as aplicações nos problemas, pois demonstrou nas ações realizadas que compreendeu o conceito envolvido no contexto, soube aplicar corretamente o modelo matemático solicitado e interpretou a solução corretamente. Logo, por seus conhecimentos prévios, este aluno está apto para assimilar o novo conhecimento de limites de uma função de uma variável real.

Tabela 16

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-04)					
P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	5	5	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	5	5	5	5	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	5	5	5	5	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

Fonte: Adaptado de Mendoza, 2013

O estudante (E-04) demonstrou compreensão ao aplicar o conceito de função nos três problemas, pois atendeu ao objetivo dos três problemas. Dos três indicadores essenciais apenas um, da primeira ação estava parcialmente correto, o que não interferiu na solução correta e, nem na justificativa de sua resposta. Demonstrou conhecimento para resolver os cálculos que implicavam na solução dos problemas.

Tabela 17

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-06)					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 1	5	4	4	4	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	2	2	2	1	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	1	1	1	1	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

Fonte: Adaptado de Mendoza, 2013

O desempenho do estudante (E-06) na Tabela 13 demonstra que o desempenho foi reduzindo conforme aumentou a complexidade dos problemas.

De acordo com o indicador essencial do problema a solução do problema (P-01) está parcialmente correta, pois faltaram elementos no gráfico construído. Contudo o desenvolvimento do cálculo mostra que o estudante fez uma identificação detalhada dos dados, porém não justificou a solução encontrada. No problema (P-02) o estudante demonstrou não compreender corretamente o problema, e, desse modo chegou a um modelo matemático incompleto, o que contribuiu para a solução também insatisfatória, não cumprindo com o objetivo. Quanto ao problema (P-03) ele não conseguiu resolver, deixou um espaço em branco.

Tabela 18

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-08)					
P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	5	4	Resolver um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	2	2	2	2	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	1	1	1	1	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução; (F) faltou na aplicação.					

Fonte: Adaptado de Mendoza, 2013

O estudante (E-08) realizou os procedimentos corretos na solução do problema (P-01), usando os termos matemáticos adequadamente e, concluiu o pensamento com uma breve descrição, mas incompleta. No problema (P-02), observou-se que o estudante demonstrou dificuldade para elaborar o modelo matemático, pois o fez de forma incompleta. Mesmo tendo identificado as variáveis corretamente, não fez a relação adequada com o modelo da função e, consequentemente não encontrou a solução adequada. Ele não resolveu o problema (P-03). Portanto, deduz-se que seu conhecimento prévio com relação aos conceitos requeridos é insuficiente para resolver com sucesso o problema proposto. Conforme

Tabela 14 nota-se que o desempenho do estudante de um problema para outro foi gradativamente inferior em relação à complexidade envolvida.

O estudante (E-11) não compareceu no teste diagnóstico.

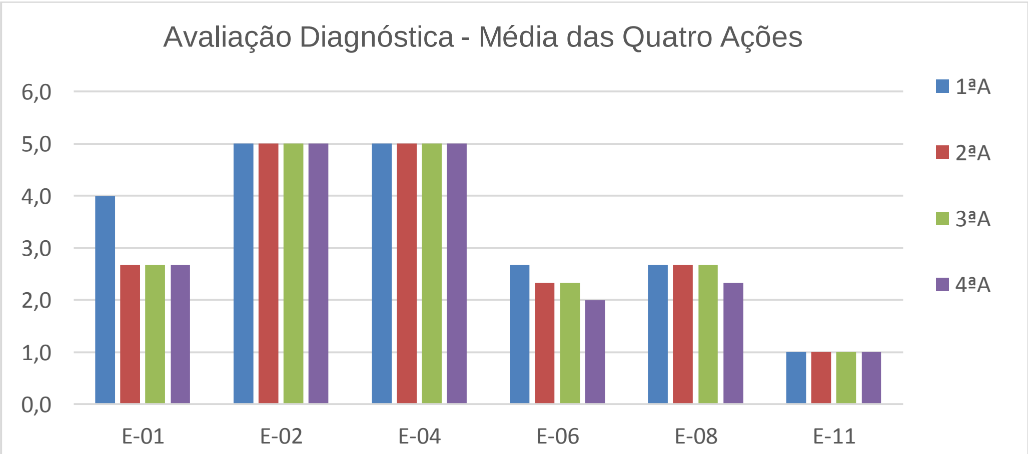
Na Tabela 19 apresentamos uma visão geral do desempenho dos estudantes na avaliação diagnóstica por indicadores quantitativos.

Tabela 19

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA																
	PROBLEMA 1				PROBLEMA 2				PROBLEMA 3				MÉDIA DOS PROBLEMAS			
	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
E-01	5	3	3	3	4	3	3	3	3	2	2	2	4,0	2,7	2,7	2,7
E-02	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5,0	5,0	5,0	5,0
E-04	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5,0	5,0	4,7	4,7
E-06	5	4	4	4	2	2	2	1	1	1	1	1	2,7	2,3	2,3	2,0
E-08	5	5	5	4	2	2	2	2	1	1	1	1	2,7	2,7	2,7	2,3
E-11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0	1,0	1,0	1,0

Legenda: E-01 a E-11: Estudantes; 1ª A até 4ª A: Ações do sistema da ESPL; P-01, P-02, P-03: Problemas do Pré-teste.

Apresentamos no Gráfico 1 a média das quatro ações dos três problemas da fase diagnóstica, por estudante.



Conforme o gráfico 1, observa-se que somente dois estudantes saíram-se bem em todas as quatro ações avaliadas através do sistema de quatro ações das situações problemas aplicadas na avaliação diagnóstica. Outros três tiveram desempenho de insuficiente a regular nas quatro ações e, um dos estudantes não participou da aplicação do pré-teste.

APÊNDICE C - RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FORMATIVA

Apêndice C - Resultados da Avaliação Formativa - Análise Descritiva

Apresentamos no Quadro 5 o modelo com um breve resumo dos parâmetros utilizados para a análise de cada um dos problemas selecionados de um dos testes aplicado na fase formativa.

Quadro 5

MODELO PARA ANÁLISE DOS PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO FORMATIVA			
PROBLEMAS	**OBJETIVO**	**CATEGORIAS**	**PARÂMETROS PARA ANÁLISE QUALITATIVA**
P – 04	Assimilar o conceito de limites laterais aplicando em uma função quadrática.	Solucionar o modelo matemático.	Analisar a construção da tabela com os valores de x próximos de 2, tanto pela esquerda quanto pela direita e identificação dos pontos dados no gráfico da equação.
P – 05	Assimilar o conceito de limites laterais mediante uma função racional.	Compreender o problema. Solucionar o modelo matemático através de tabelas e gráficos.	Analisar se o estudante identificou o domínio da função racional, demonstrando que compreendeu o problema e sabe resolver este tipo de função, bem como se identificou os valores que indicam a aproximação por ambos os lados (direito e esquerdo) nos modelos matemáticos apresentados (tabelas e gráfico). Descrever sua compreensão do comportamento da função num determinado ponto.
P – 06	Assimilar o conceito de limites laterais mediante uma função real	Compreender o Problema. Solucionar o modelo matemático através de tabelas e gráficos.	Analisar se o estudante identificou o domínio da função racional, demonstrando que compreendeu o problema e sabe resolver este tipo de função, bem como se identificou os valores que indicam a aproximação por ambos os lados (direito e esquerdo) nos modelos matemáticos apresentados (tabelas e gráfico). Descrever sua compreensão do comportamento da função num determinado ponto.
	Assimilação da	Compreender o	Verificar se o estudante entendeu

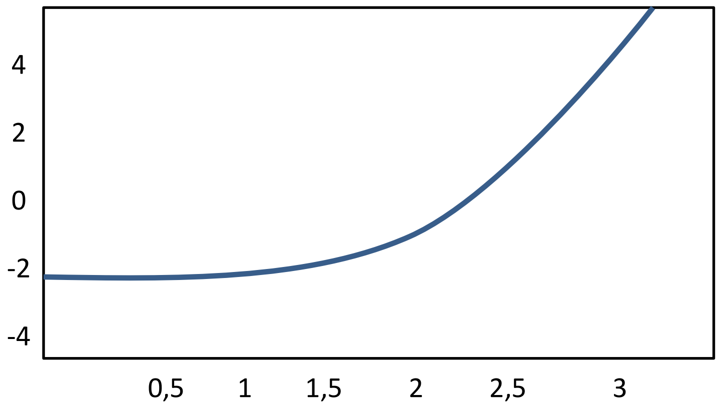
P – 07	definição formal de limite.	problema.	o conceito de limite através da definição formal e, se é capaz de explicar o modelo matemático

Apresentaremos primeiro cada um dos problemas selecionados na fase formativa para a análise do desempenho dos estudantes e na sequência a cada problema apresentamos nas Tabelas de 20 a 25, o resultado das análises descritivas quali-quanti de todos os estudantes que participaram da pesquisa, na ordem alfanumérica (E-01 a E-11) dos seis estudantes E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11 participantes na pesquisa.

PROBLEMA 4

Este problema tem por objetivo a análise do comportamento da função, em um determinado ponto, atribuindo valores próximos a esse número para assimilar a ideia de limite por aproximação e, além disso, verificar sua prática com os diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 04: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:



g) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x=2

x=2 (esquerda)	
x	f(x)

x=2 (direita)	
x	f(x)

h) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

i) Explique o comportamento da função f(x) = $x^2 + x - 6$ no ponto x = 2.

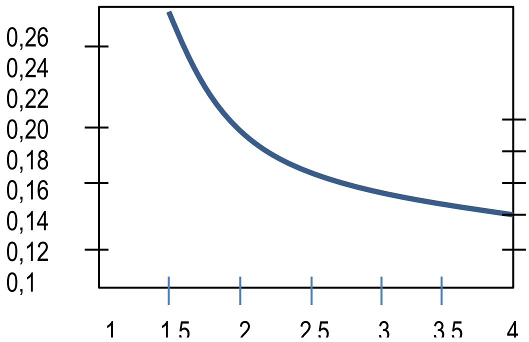
Os demais problemas (P-05, P-06 e P-07) apresentam graus cada vez maiores de complexidade, mas têm o mesmo padrão, somente o último (P-07) não é sobre limites laterais.

PROBLEMA 5

O segundo problema (P-05), trata de limites laterais de uma função racional, cujo denominador contém uma equação de segundo grau incompleta. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível maior de complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição (domínio) para sua resolução. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 05:

Dada a função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



g) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)	
x	f(x)

x=1 (direita)	
x	f(x)

h) Represente os pontos da tabela no gráfico.

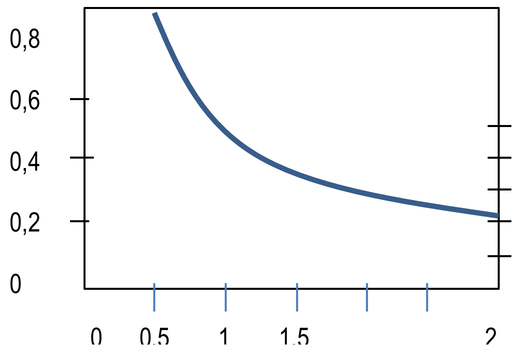
i) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{x-3}{x^2-9}$ no ponto x = 3.

PROBLEMA 6

Este problema trata de limites laterais de uma função real, racional, em que o estudante deve aplicar os conhecimentos de resolução de equação envolvendo radiciação e equação do primeiro grau. Esse problema teve como objetivo verificar a compreensão do conceito de limites laterais, isto é, aproximação a um ponto por ambos os lados (direito e esquerdo) com um nível de média complexidade do conceito de função, pois o estudante deverá identificar o domínio da função, pois este tipo de função racional tem uma condição para sua resolução que é o domínio. Além disso, o estudante tem a oportunidade de usar diferentes tipos de modelos matemáticos como tabelas e gráficos.

PROBLEMA 06:

Dada a função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ representada pelo gráfico, responde o que se segue:



g) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 1:

x=1 (esquerda)			x=1 (direita)	
x	f(x)		x	f(x)

h) Represente os pontos da tabela no gráfico.

i) Explique o comportamento da função f(x) = $\frac{\sqrt{X}-1}{X-1}$ no ponto x = 1.

PROBLEMA 7

O problema (P-07) apresenta-se com um nível de abstração maior que dos outros problemas, pois se entende que o estudante que já se familiarizou com a ideia de aproximação de um ponto através de vários exemplos e exercícios. Na sequência foram apresentadas as leis do limite, então, se espera que agora o estudante possa mostrar que já tem competência para resolver questões mais abstratas do conceito de limite. Com este problema tem-se o objetivo de analisar a compreensão do estudante do conceito de limite a partir da definição formal (abstrata) e também do seu entendimento sobre o conceito de continuidade.

PROBLEMA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

e) É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$?

f) Justifique sua resposta.

A seguir, nas Tabelas de 20 a 25 apresentamos a análise das respostas dos estudantes ao problema 4 (P-04)

Problema 4 – Estudante (E-01) – Análise da resolução

Tabela 20

AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante faz a leitura extrai os elementos do problema dado, destacando valores aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	O	5
Construir o modelo	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função f(x)= x^2+x-6, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com		5

matemático	retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita.	O	
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 pela esquerda e 2,5 até 2,001 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "investigamos os valores da função quando x tende a 2. Observa-se que a medida que x se aproxima de 2 tanto pela esquerda, quanto pela direita, mais próximo de 0 estará f(x)", que foi observado pelo cálculo da função f(x) dando valores próximos de 2 para x.	O	5

Problema 4 – Estudante (E-02) – Análise da resolução

Tabela 21

AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 DO ESTUDANTE (E-02)

CATEGORIAS	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema atribuindo valores para x, aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda.	O	5
Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função $f(x)= x^2+x-6$, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 com f(x) = - 0,0049 pela esquerda e 2,5 até 2, 0001 com f(x) = 0,005 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "Quando x tende a 2, f(x) tende a zero". Sua explicação é curta, mas objetiva e clara.	O	5

Problema 4 – Estudante (E-04) – Análise da resolução

Tabela 22

AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 (P-04) DO ESTUDANTE 4 (E-04)

CATEGORIA	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema atribuindo valores para x, aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda.	O	5
Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função f(x)= x^2+x-6, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 com f(x) = - 0,0049 pela esquerda e 2,5 até 2, 0001 com f(x) = 0,005 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "quando nos aproximamos do valor de x=2 pela direita, y=f(x) se aproxima de "0" por valores maiores do que zero e, quando nos aproximamos do valor de x=2 pela esquerda y=f(x) se aproxima de "0" por valores menores do que zero".	O	5

Problema 4 – Estudante (E-06) – Análise da resolução

Tabela 23

AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 (P-04) DO ESTUDANTE 6 (E-06)

CATEGORIA	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema atribuindo valores para x, aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda.	O	5
Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função f(x)= x^2+x-6, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita. E ainda colocou setas de indicação de ambos os lados no eixo x.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99999 com f(x) = - 0,0004999 pela esquerda e 2,5 até 2, 01 com f(x) = 0,0501 pela	O	5

	direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.		
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "o limite da função quando x tende a 2 é igual a zero" e também escreve a fórmula que indica o limite: $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.	O	5

Problema 4 – Estudante (E-08) – Análise da resolução

Tabela 24

AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 (P-04) DO ESTUDANTE 8 (E-08)

CATEGORIA	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema atribuindo valores para x, aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda e, quando preenche o gráfico coloca setas de indicação de ambos os lados.	O	5
Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função f(x)= x^2+x-6, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita. Fez o seguinte cálculo: $2^2 + 2 – 6$ 4 + 2 – 6 6 – 6 = 0	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 com f(x) = - 0,0499 pela esquerda e 2,4 até 2, 0001 com f(x) = 0,0005 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: "o limite da função quando tende a 2, será igual a zero"	O	5

Problema 4 – Estudante (E-11) – Análise da resolução

Tabela 25

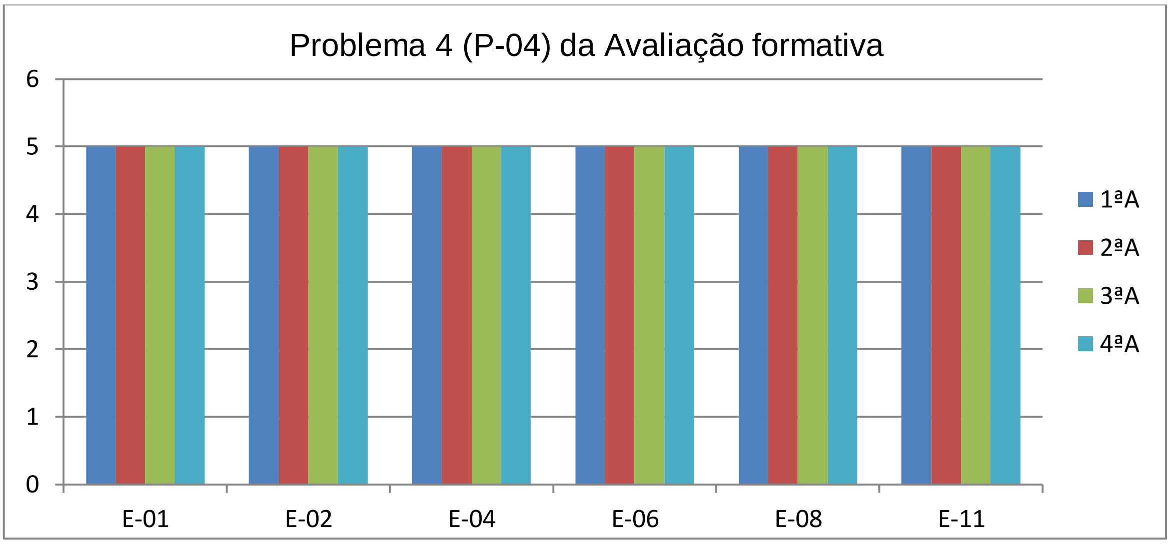
AVALIAÇÃO FORMATIVA DO PROBLEMA 4 (P-04) DO ESTUDANTE 11 (E-11)

CATEGORIA	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema atribuindo valores para x, aproximando-se de $x = 2$ pela direita e pela esquerda.	O	5

Construir o modelo matemático	O estudante determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na função f(x)= x^2+x-6, completando as duas tabelas. Com relação ao gráfico, ele preencheu com retas pontilhadas, indicando a aproximação do ponto x=2, pela esquerda e pela direita. E ainda colocou setas de indicação de ambos os lados no eixo x e, ao lado do gráfico escreveu a fórmula $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 com f(x) = - 0,04999 pela esquerda e 2,5 até 2, 001 com f(x) = 0,00050 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante interpreta corretamente o problema quando menciona: “quando nos aproximamos do x→2, a função se aproxima de zero, tanto pela direita quanto pela esquerda, portanto limite: $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$. Indica $\to 2^{+}$ e $\to 2^{-}$	O	5

Apresentamos o gráfico referente a análise do desempenho dos estudantes na resolução do problema 4 (P-04).

Gráfico 2



<u>PROBLEMA 5</u> – Nas tabelas de 26 a 31 apresentamos o resultado das análises das respostas dos estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11).

Problema 5 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 26

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional e identificou o domínio “D=R = {±3}”, e também explicou o comportamento da função no ponto dado.	B	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,5 →f(x)=0,1818181818 e 2,9999 → f(x) = 0,16666694445 pela esquerda e 3,5 → f(x)=0,1538461538 e 3,0001 → f(x) =0,16666638889 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=3. Desse modo, ele explica: “nas vizinhanças de 3, a função f(x) tem limite 0,16, porque tanto pela direita quanto pela esquerda de 3, nos aproximamos de 0,16 em f(x).	O	5

Problema 5 – Estudante (E-02) – Análise da resolução
Tabela 27

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 2 (E-02)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional, elaborou o cálculo (provavelmente para saber o domínio). Mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=3 com a bolinha aberta (isto indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 3, mas não igual a 3).	O	5

Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3.Ao lado do gráfico o estudante elaborou o seguinte cálculo: $x^2 - 9 \neq 0$ $x^2 \neq \sqrt{9}$ $x \neq \pm 3$ Na verdade, aqui o estudante está calculando o domínio, embora não o especifique claramente por escrito.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,5 →f(x)=0,1818 e 2,99 → f(x) = 0,16669 pela esquerda e 3,5 →f(x)=0,15389 e 3,001 → f(x) =0,16663 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=3. Desse modo, ele explica: “quando o valor de x se aproxima de 3, o valor de f(x) tende a 0,16. Desse modo, atendeu satisfatoriamente ao objetivo.	O	5

Problema 5 – Estudante (E-04) – Análise da resolução

Tabela 28

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 4 (E-04)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-04) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional pela explicação que deu na questão (c) e preencheu satisfatoriamente o gráfico e as tabelas.	O	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3. No gráfico indicou com setas do seguinte modo $\rightarrow 2^{-}$ e $\leftarrow 2^{+}$.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,5 →f(x)=0,1818 e 2,999 → f(x) = 0,1666 pela esquerda e 3,5 →f(x)=0,1538 e 3,001 → f(x) =0,1666 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso	O	5

	da calculadora.		
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função em um ponto. Desse modo, ele explica: “exatamente no ponto x=3 ∄ valor real para f(x) quando x=3. Quando se aproxima pela esquerda do valor de 3, f(x) se aproxima de 0,16. Quando x se aproxima de 3 pela direita f(x) se aproxima de 0,16, o que corresponde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Problema 5 – Estudante (E-06) – Análise da resolução
Tabela 29

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 6 (E-06)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-06) demonstrou compreender o problema o conceito de função racional, pois elaborou cálculo (provavelmente para saber o domínio, sem, contudo, fazer qualquer indicação). Mas, mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=3 com a bolinha aberta (isto indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 3, mas não igual a 3).	O	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,5 →f(x)=0,18181818 e 2,9999 → f(x) = 0,16663444 pela esquerda e 3,5 →f(x)=0,153846538 e 3,0001 → f(x) =0,1666638143 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora, mas elaborou cálculos (subtende-se para saber o domínio) como se segue: $F(3) = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{0} = 0$, f(3) = ñ existe.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=3. Desse modo, ele explica: “o limite da função quando x tende a 3 é igual a 0,16”, porém, esta explicação ainda não é suficiente para atender ao objetivo do problema.	R	4

Problema 5 – Estudante (E-08) – Análise da resolução

Tabela 30

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 8 (E-08)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional, pois elaborou o cálculo (provavelmente para saber o domínio, sem, contudo, fazer qualquer indicação). Mas, mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=3 com a bolinha aberta (isto indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 3, mas não igual a 3).	B	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,6 →f(x)=0,178 e 2,999 → f(x) = 0,1666 pela esquerda e 3,5 →f(x)=0,153 e 3,01 → f(x) =0,166 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora, mas esboçou o seguinte $x^2 - 9 \neq 0$, $\frac{x-3}{x^2-9}$(referindo-se provavelmente ao domínio), havia inícios de mais cálculo, mas na cópia do testes estava ilegível.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função em um ponto. Desse modo, ele explica: “o limite da função quando x é igual a 3, é igual a 0,16. Esta explicação está confusa e não corresponde ao que foi solicitado no problema.	I	2

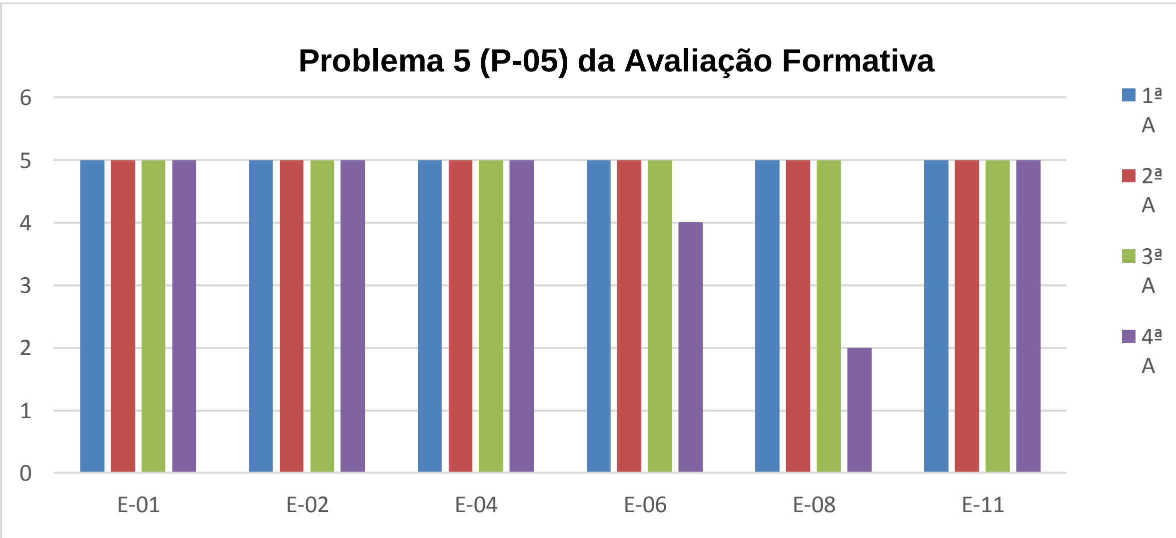
Problema 5 – Estudante (E-11) – Análise da resolução

Tabela 31

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 5 (P-05) DO ESTUDANTE 11 (E-11)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional, pois elaborou o cálculo (provavelmente para saber o domínio, sem, contudo, fazer qualquer indicação). Mas, mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=3 com a bolinha aberta (isto indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 3, mas não igual a 3).	O	5

Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 3 e também colocou a bolinha vazia no gráfico indicando entendimento sobre o domínio.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 2,6 →f(x)=0,178 e 2,999 → f(x) = - 0,1666 pela esquerda e 3,5 →f(x)=0,1538 e 3,0001 → f(x) =0,16666 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=3. Desse modo, ele explica: “ao observar o comportamento da f(x) $\frac{x-3}{x^2-9}$ quando x → 3, notamos que o seu limite é lim f(x) = 0,16. Portanto, o estudante atendeu satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Gráfico 3



<u>PROBLEMA 6</u> – Nas tabelas de 32 a 37 apresentamos o resultado das análises das respostas dos estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11).

Problema 6 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 32

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 1 (E-01)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional. Analisou satisfatoriamente a função nas vizinhanças do ponto dado preenchendo as tabelas com os valores e identificando esses valores no gráfico.	O	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas, em ambos os lados, próximo ao número 1.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 →f(x)=0,585786437 e 0,999 → f(x) = 0,500125063 pela esquerda e 1,5 → f(x)=0,449489782 e 1,001 → f(x) =0,49987506 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=1. Desse modo, ele explica: “nas vizinhanças de 1, a função f(x) = $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ tem limite 0,5. Pois percebemos que tanto pela direita quanto pela esquerda de 1, nos aproximamos de 0,5 em f(x). Portanto, o estudante atendeu satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Problema 6 – Estudante (E-02) – Análise da resolução
Tabela 33

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 2 (E-02)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional, elaborou o cálculo (provavelmente para saber o domínio). Mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=1 com a bolinha aberta (isto	O	5

	indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 1, mas não igual a 1).		
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 1. Ao lado do gráfico o estudante elaborou o seguinte cálculo: $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ Na verdade, aqui o estudante está calculando o domínio, embora não o especifique claramente por escrito.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 →f(x)=0,05857 e 0,999 → f(x) = 0,50012 pela esquerda e 1,5 →f(x)=0,4494 e 1,001 → f(x) =0,4998 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	5
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=1. Desse modo, ele explica: “quando o valor de x se aproxima de 1, f(x) tende a 0,5. Portanto, o estudante atendeu satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Problema 6 – Estudante (E-04) – Análise da resolução
Tabela 34

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE4 (E-04)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-04) demonstrou compreender o problema e o conceito de função racional. Mostrou no gráfico o intervalo aberto no ponto x=1 com a bolinha aberta (isto indica o entendimento sobre limite, com valores para x suficientemente próximo de 1, mas não igual a 1).	O	5
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 1,mas não no número, o que indicou através de uma bolinha aberta.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 →f(x)=0,05857 e 0,999 → f(x) = 0,50001 pela esquerda e 1,5 →f(x)=0,4494 e 1,001 → f(x) =0,4999 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o	O	5

	preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.		
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função em um ponto. Desse modo, ele explica: "$\nexists$ valor real para f(x) quando x=1. Quando se aproxima pela esquerda do valor de 1, f(x) se aproxima de 0,5. Quando x se aproxima de 1 pela direita f(x) se aproxima de 0,5, o que corresponde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Problema 6 – Estudante (E-06) – Análise da resolução

Tabela 35

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 6 (E-06)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-06) demonstrou compreender parcialmente o problema e o conceito de função racional quando preencheu as tabelas com valores próximos de 1 e identificou no gráfico com retas pontilhadas esses valores, mas não identificou com a bolinha aberta que o 1 não faz parte.	O	4
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 1,mas não no próprio número, porém não indicou isto através de uma bolinha aberta.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 $\rightarrow$f(x)=0,05857 e 0,999 $\rightarrow$ f(x) = 0,50001 pela esquerda e 1,5 $\rightarrow$f(x)=0,4494 e 1,0001 $\rightarrow$ f(x) =0,4999 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	O	4
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função em um ponto. Desse modo, ele explica: "o comportamento da função quando x se aproxima pela esquerda do valor de 1, f(x) se aproxima de 0,5. Quando x se aproxima de 1 pela direita f(x) se aproxima de 0,5. O limite da função quando x $\rightarrow$ 1 é igual a 0,5, o que corresponde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Problema 6 – Estudante (E-08) – Análise da resolução
Tabela 36

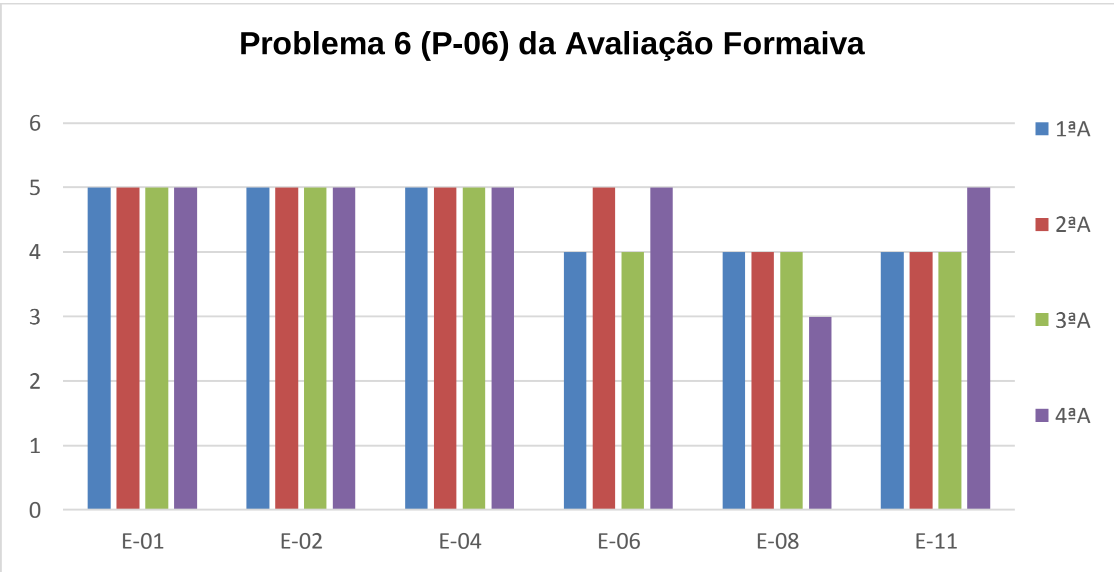
AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 8 (E-08)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) demonstrou compreender parcialmente o problema e o conceito de função racional quando preencheu as tabelas com valores próximos de 1 e identificou no gráfico com retas pontilhadas esses valores, mas não identificou com a bolinha aberta para indicar $x \neq 1$.	B	4
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com retas pontilhadas de ambos os lados do número 1, mas não no próprio número 1, porém não indicou isto através de uma bolinha aberta.	B	4
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 $\rightarrow$f(x)=0,058 e 0,999 $\rightarrow$ f(x) = 0,501 pela esquerda e 1,5 $\rightarrow$f(x)=0,448 e 1,001 $\rightarrow$ f(x) =0,49 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	B	4
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função em um ponto. Desse modo, ele explica: “o limite da função quando x for igual a 1 é igual a 0,5. Esta explicação está incompleta, o que não corresponde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	R	3

Problema 6 – Estudante (E-11) – Análise da resolução
Tabela 37

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 6 (P-06) DO ESTUDANTE 11 (E-11)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-11) demonstrou compreender parcialmente o problema e o conceito de função racional quando preencheu as tabelas com valores próximos de 1 e identificou no gráfico com retas pontilhadas esses valores, mas não identificou com a bolinha aberta para indicar $x \neq 1$.	B	4
Construir o modelo matemático	Os modelos matemáticos são dados no problema e o estudante entende que deve fazer cálculos para preencher a tabela e com os valores obtidos identifica no gráfico com		4

	retas pontilhadas de ambos os lados do número 1, mas não no próprio número 1, porém não indicou isto através de uma bolinha aberta.	B	
Solucionar o modelo matemático	O estudante soluciona o modelo, preenchendo as duas tabelas solicitadas no problema atribuindo valores para x no intervalo de 0,5 →f(x)=0,05357 e 0,999 → f(x) = 0,500 pela esquerda e 1,5 →f(x)=0,4494 e 1,001 → f(x) =0,4992 pela direita. No gráfico representa esses pontos por retas pontilhadas. Não apresentou cálculos para o preenchimento das tabelas, visto que foi permitido o uso da calculadora.	B	4
Interpretar a solução	O estudante é solicitado para explicar o comportamento da função no ponto x=1. Desse modo, ele explica: "ao pegarmos os pontos da vizinhança de x = 1, como a função f(x) = $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, tanto pela direita, quanto pela esquerda, seu movimento, achando o lim f(x) = 0,5, o que corresponde satisfatoriamente ao objetivo do problema.	O	5

Gráfico 4



<u>PROBLEMA 7</u> - Nas tabelas de 38 a 43 apresentamos o resultado das análises das respostas dos estudantes (E-01, E-02, E-04, E-06, E-08 e E-11).

Problema 7 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 38

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE (E-01)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-01) deve explicar seu entendimento da definição formal de limite. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, como o estudante não faz nenhuma referência a isso, conclui-se que sua explicação é insuficiente para atender aos objetivos do problema.	B	4
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	B	4
Solucionar o modelo matemático	Para explicar o que foi solicitado, o estudante escreve: “o limite de f(x) é igual a 7 quando x tende para, ou seja 2, nas vizinhanças de 2, tanto pela direita quanto pela esquerda nos aproximamos de 7” e, para a questão (a) responde “Sim ao questionamento e justifica da seguinte forma: “pois sendo a função f(x) pegando x=2 e substituindo na função encontramos 2 como resultado”. Contudo, sua resposta está incompleta e, por isso, não satisfaz ao objetivo do problema.	B	4
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de “solucionar o modelo matemático”	B	4

Problema 7 – Estudante (E-02) – Análise da resolução
Tabela 39

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE 2 (E-02)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) não relaciona todos os elementos necessários para resolver o problema. O estudante deve explicar seu entendimento da definição formal de limite, porém, sua explicação está incompleta já que não menciona “nas vizinhanças, tanto pela direita quanto pela esquerda”. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, a	B	4

	qual a resposta satisfaz ao objetivo da questão.		
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	B	4
Solucionar o modelo matemático	Tem o intuito de solucionar o modelo matemático quando escreve: "o valor de f(x) quando tendemos a 2 é aproximado de 7", mas sua explicação está incompleta. Para a questão (a) responde "Sim, se tivermos uma função que apresente descontinuidade". Esta resposta satisfaz ao objetivo da questão. Mas, de modo geral atende parcialmente ao objetivo do problema.	B	4
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de "solucionar o modelo matemático".	B	4

Problema 7 – Estudante (E-04) – Análise da resolução – O estudante não respondeu a este problema

Problema 7 – Estudante (E-06) – Análise da resolução
Tabela 40

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE (E-06)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-06) deve explicar seu entendimento da definição formal de limite, contudo, a explicação está incompleta. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, como o estudante não faz nenhuma referência a isso, conclui-se que sua explicação é insuficiente para atender aos objetivos do problema.	R	3
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	R	3
Solucionar o modelo matemático	Tem o intuito de solucionar o modelo matemático quando escreve: "o limite de f(x) quando tende a 2 é igual de 7", o que está incompleto, pois deveria escrever *que nas vizinhanças de x=2, aproximando-se tanto pela esquerda quanto pela direita, f(x) é igual a 7*. Não responde nada na questão (a). Dessa forma, sua resposta satisfaz apenas parcialmente ao objetivo do problema.	R	3
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de "solucionar o modelo matemático".	R	3

Problema 7 – Estudante (E-08) – Análise da resolução
Tabela 41

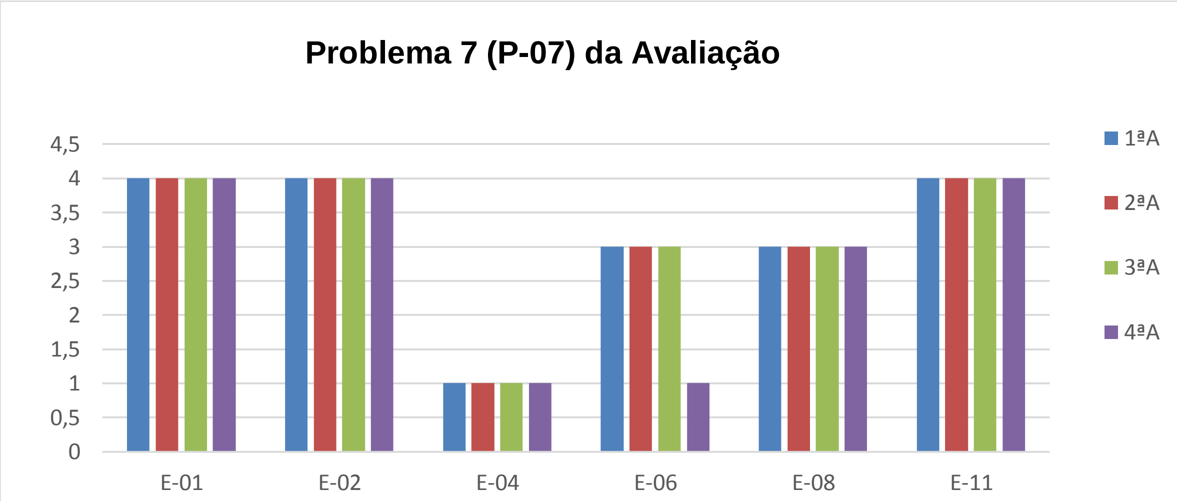
AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE (E-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) deve explicar seu entendimento da definição formal de limite, contudo, a explicação está incompleta. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, como o estudante não faz nenhuma referência a isso, conclui-se que sua explicação é insuficiente para atender aos objetivos do problema.	R	3
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	R	3
Solucionar o modelo matemático	Tem o intuito de solucionar o modelo matemático quando escreve: “o limite de f(x) quando tende a 2 é igual de 7”, o que está incompleto, pois deveria escrever *que nas vizinhanças de x=2, aproximando-se tanto pela esquerda quanto pela direita, f(x) é igual a 7*. Não responde nada na questão (a). Dessa forma, sua resposta satisfaz apenas parcialmente ao objetivo do problema.	R	3
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de “solucionar o modelo matemático”.	R	3

Problema 7 – Estudante (E-11) – Análise da resolução
Tabela 42

AVALIAÇÃO FORMATIVA - PROBLEMA 7 (P-07) DO ESTUDANTE (E-11)			
CATEGORIAS	ANÁLISE DESCRITIVA	CONCEITO	PONTOS
Compreender o problema	O estudante (E-01) deve explicar seu entendimento da definição formal de limite. A questão (a) trata da mesma definição, mas também do conceito de continuidade, como o estudante não faz nenhuma referência a isso, conclui-se que sua explicação é insuficiente para atender aos objetivos do problema.	B	4
Construir o modelo matemático	Os modelos são dados no problema e, através destes modelos, o estudante faz sua interpretação que não satisfaz totalmente ao objetivo do problema.	B	4
Solucionar o modelo matemático	Para explicar o que foi solicitado, o estudante escreve: “que o limite da f(x) = 7 quando x →2, ou seja 2, quando segundo pontos da vizinhança de 2, chegamos		4

	ao limite que é 7". Para a questão (a) responde "Sim ao questionamento e justifica da seguinte forma: "pois função f(x) = 2 e substituindo na função encontramos 2 como resultado". Contudo, sua resposta está incompleta e, por isso, não satisfaz ao objetivo do problema.	B	
Interpretar a solução	Atende a esta ação conforme a categoria de "solucionar o modelo matemático"	B	4

Gráfico 5



A seguir apresentamos a síntese do desempenho de todos os estudantes envolvidos no processo da avaliação formativa.

Tabela 43

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-01) AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**4**	4	**4**	4	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Tabela 44

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-02) AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**4**	4	**4**	4	Interpretar a definição $\lim_{x \to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Tabela 45

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-04) AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**1**	1	**1**	1	Interpretar a definição $\lim_{x \to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Tabela 46

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-06) AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**4**	5	**4**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**4**	5	**4**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**3**	3	**3**	3	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Tabela 47

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-08) AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	2	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**4**	4	**4**	3	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**3**	3	**3**	3	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

Fonte: Mendoza, 2013

Tabela 49

SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-11) - AVALIAÇÃO FORMATIVA					
P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto Essencial do Problema**
nº 4	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (quadrática) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 5	**5**	5	**5**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas.
nº 6	**4**	4	**4**	5	Compreender e explicar o comportamento de uma função real (racional) nas proximidades de um ponto com aplicação em gráficos e tabelas
nº 7	**4**	4	**4**	4	Interpretar a definição $\lim_{x \to a} f(x) = L$, e explicar o modelo $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ e explicar se é possível sua aplicação quando f(2) = 2

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

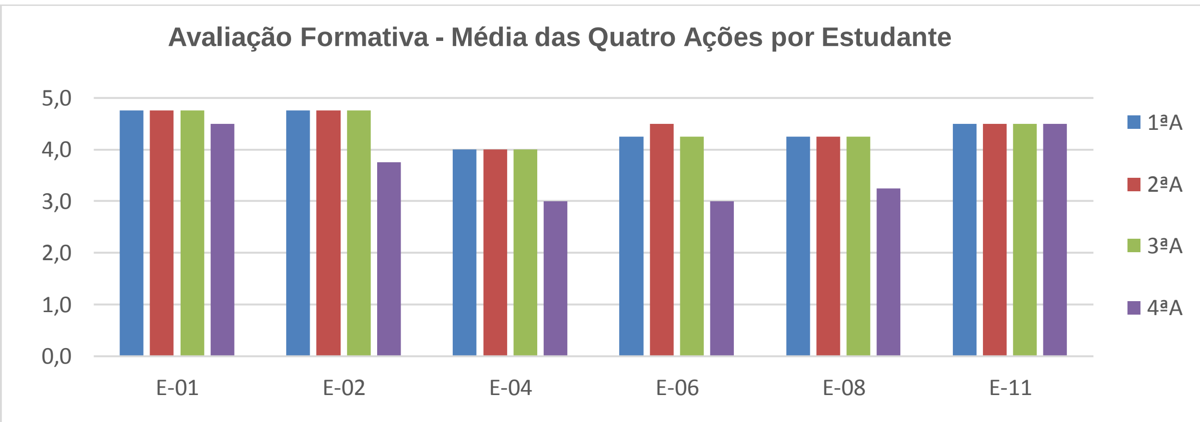
Fonte: Mendoza, 2013

A seguir apresentaremos a tabela 49 do o resultado geral e o gráfico 6 da média das ações da avaliação formativa.

Tabela **49**

AVALIAÇÃO FORMATIVA																				
	P04					P05					P06					P07				
	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**
E-01	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	4	4	4	4	**16**
E-02	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	4	4	4	4	**16**
E-04	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**20**	1	1	1	1	**1**
E-06	5	5	5	5	**20**	4	5	4	5	**18**	4	5	4	5	**18**	3	3	3	3	**18**
E-08	5	5	5	5	**20**	5	5	5	2	**17**	4	4	4	3	**16**	3	3	3	3	**18**
E-11	5	5	5	5	**20**	5	5	5	5	**10**	4	4	4	5	**17**	4	4	4	4	**16**

Gráfico 6



APÊNDICE D - RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FINAL

Apêndice E - Resultados do Teste Final - Análise Descritiva

Apresentamos no Quadro 6 o modelo com um breve resumo dos parâmetros utilizados para a análise de cada um dos dois problemas (P-08 e P-09) selecionados de um dos testes aplicado na fase formativa.

Quadro 6

MODELO PARA ANÁLISE DOS PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO FINAL			
PROBLEMAS	**OBJETIVO**	**CATEGORIAS**	**PARÂMETROS CONCEITUAIS**
P – 08	Aplicar o conceito de limites laterais e continuidade em vários tipos de função. O aluno deverá usar o conceito de função continua e fazer o esboço do gráfico da função. Para uma função ser continua em um numero dado, deve satisfazer três condições: analisando a continuidade num ponto c, as condições são: (i) $f(c)$ é definida; (ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe e (iii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.	Solucionar o modelo matemático.	Construir as tabelas com valores pela esquerda e pela direita e identificação dos pontos dados no gráfico de cada uma das funções. (a) Descontinua, $f(2)$ não está definida $f(x) = \|x-2\|$. (b) Descontínua, pois o limite não existe, tendo em vista que os limites laterais são diferentes. Não atende o (ii). (c) Descontínua. a mesma justificativa anterior (d) Contínua. Atende aos três requisitos.
P – 09	Interpretar o conceito de limites laterais na situação problema.	Compreender o problema. Solucionar o modelo matemático.	O aluno deve explicar que o resultado encontrado é o custo máximo para remover 809 dos resíduos se retira 80% dos resíduos chega-se ao custo máximo. $f(1)$ está definido $f(1) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ (2) $s(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}\ com\ 0 < 0 < 100$ $\lim_{x\to 100-} s(x) = 80$

A seguir apresentamos os dois problemas (P-08 e P-09) da avaliação final, selecionados para análise das respostas dos estudantes.

PROBLEMA 8 (P-08)

O problema (P-08) propõe a aplicação da definição de limites laterais e a verificação se cada uma das funções é contínua ou descontínua e explicar com base da definição de continuidade de uma função a partir das condições para uma função ser contínua. Além disso, o estudante deverá fazer os cálculos de aproximação a um ponto e compor as duas tabelas para os limites laterais e esboçar os gráfico que representam as funções.

Problema 8 - Explique que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função:

a) $f(x) = \ln|x-2|$ a = 2

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \; se \; x \neq 1 \\ 2 \; se \; x = 1 \end{cases}$ a = 1

c) $f(x) = \begin{cases} e^x \; se \; x < 0 \\ x^2 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ a = 0

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ a =1

PROBLEMA 9 (P-09)

O problema (P-09) propõe a aplicação da definição de limites infinitos na análise contextual para identificar o custo percentual de remoção de resíduos tóxicos, como objetivo do problema, com base na definição de limite. Portanto, o estudante deverá analisar o curso para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos e concluir que, quanto mais próximo de 100 forem os valores de x pela esquerda, o limite poderá crescer indefinidamente ou decrescer indefinidamente.

Problema 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado por $S(x) = \frac{0,8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

a) Calcule $\lim_{x \to 100^-} S(x)$

b) Interprete o resultado obtido

A seguir apresentamos nas Tabelas 50 a 55 a análise das respostas ao problema 8 (P-08) da avaliação final.

Problema 8 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 50

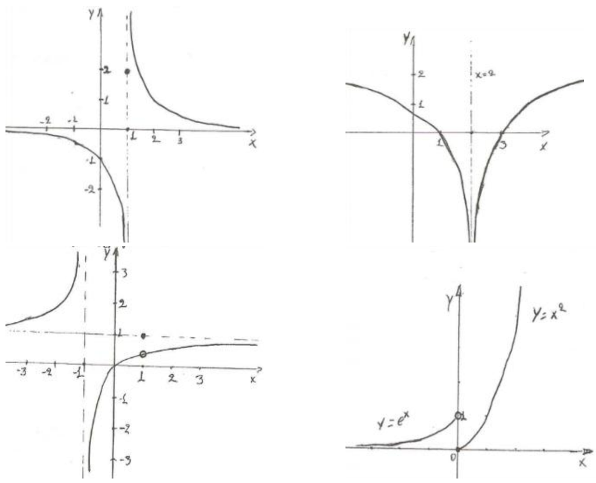
AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-01) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante faz a leitura de todas as questões, do item (a) até (d), identificando as funções e atribuindo valores para x em f(x). Observa-se, que elabora a tabela de demonstração das coordenadas (x, y) encontradas em f(x). Esboça o modelo para resolver cada função e ao explicar o procedimento.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as incógnitas das coordenadas e da variável x em f(x). Elabora e faz uso dos modelos para encontrar as coordenadas e para realizar o esboço do gráfico. O estudante faz a aplicação das variáveis e incógnitas para determinar se a função é contínua ou descontínua e encontrar as coordenadas dos gráficos.	O	5
Solucionar o modelo matemático	O estudante utiliza o método de atribuição de valores para x em f(x) para encontrar as coordenadas do gráfico, observando o critério do valor dado na função. Soluciona o modelo de todas as questões compondo uma tabela organizada pelo método de atribuição de valores para x em f(x) próximos ao valor limite da função. Respondeu sobre a continuidade: *a) é descontínua em 2, pois não existe imagem; b) é descontínua em 1, pois não existe imagem para este número; c) [não respondeu]; e d) é descontínua porque em f(x)= $(x^2\text{-}x)/(x^2\text{-}1)$, o f(a) não existe.*	B	4
Interpretar a solução	O estudante estrai de todas as funções dadas no problema os resultados relacionados ao objetivo de cada uma, com respectiva descrição do resultado encontrada, neste caso, se a função é contínua ou descontínua. Encontra a resposta para todas as funções dadas no problema, cria uma tabela para cada função, atribuindo-lhes valores para x em f(x) para encontrar os pontos das coordenadas do gráfico, posteriormente o estudante esboça o gráfico geométrico da função com todos os elementos da função mencionados, com análise e afirmação do resultado. *a) é descontínua em 2, pois não existe imagem; b) é descontínua em 1, pois não existe imagem para este número; c) não respondeu; e d) é descontínua porque em f(x)= $(x^2\text{-}x)/(x^2\text{-}1)$, o f(a) não existe.*	B	4

	Não mencionou a resposta da questão (c) se a função é contínua ou descontínua. E errou a questão (d) ao colocar que a função é descontínua.		

Problema 8 (P-08) – Estudante (E-02) – Análise da resolução
Tabela 51

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-02) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-02) faz a leitura das funções do problema e extrai os elementos essenciais para saber se a função é contínua ou descontínua no ponto dado. Realiza os cálculos, compõe as das tabelas dos pontos próximos do valor dado, constrói o gráfico de cada uma das funções. Ao destacar cada uma das funções se observa que o Estudante define parcialmente o objetivo, pois não responde se cada uma das funções é contínua ou descontínua, nem usa as condições da definição de continuidade.	B	4
Construir o modelo matemático	Identifica as variáveis e incógnitas dispostas na tabela para encontrar os pontos próximos do ponto dado tanto pela sua direita, quanto pela esquerda. Nomeia as variáveis, classifica x elevado ao sinal de menos pela esquerda e x elevado ao sinal positivo pela direita. Constrói e determina as condições para resolver, ao destacar cada uma das funções para identificar o tipo. O Estudante realizou também para todas as funções o gráfico e também fez um breve relatório descritivo.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução intuitiva de limite, compondo tabela e gráfico do comportamento da função para poder identificar se é contínua ou não. O Estudante explica porque cada função é descontínua, atribui valores pela direita e pela esquerda, mas somente responde corretamente que a função é descontínua e não menciona as condições para uma função ser contínua.	B	4
Interpretar a solução	Através das funções dadas destaca e descreve o comportamento identificando o tipo, atendendo parcialmente ao objetivo do problema, pois só menciona que a função da questão (b) é descontínua, explicando com base na tabela e gráfico.	B	4

Problema 8 (P-08) – Estudante (E-04) – Análise da resolução
Tabela 52

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-04) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-04) faz a leitura e extrai os elementos das funções de cada questão. Determina as condições e o objetivo quando, esboça um gráfico a partir dos dados do problema e por isso consegue explicar. Define o objetivo ao destacar o modelo gráfico e a explicação dada sobre cada função resolvida.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas necessárias para resolver o problema. Constrói os gráficos de cada função e compõe as tabelas para todas as funções na forma. 	O	5
Solucionar o modelo matemático	Aplica o método para resolução da função limite. Soluciona todos os modelos matemáticos, fazendo a seguinte descrição para cada uma: apenas a última: *a) ele afirma ser descontínua, pois a função logarítmica não está definida no ponto 2; b) afirma ser descontínua porque no ponto 1 o limite não existe; c) afirma pelas condições dada da função os limites laterais não são iguais, ou seja, não existe, logo é descontínua; e d) não escreve se é ou não contínua.*	O	5
Interpretar a solução	Extrai os resultados destacando cada uma das funções. Dá resposta parcialmente ao problema, pois para uma das funções o estudante não descreveu a resposta. Descreve o motivo de três funções serem descontínuas faltando apenas a última: *a) ele afirma ser descontínua, pois a função logarítmica não está definida no ponto 2; b) afirma ser descontínua porque no ponto 1 o limite não existe; c) afirma pelas condições dada da função os limites laterais não são iguais, ou seja, não existe, logo é descontínua; e*	O	5

	d) não explicou.		

Problema 8 (P-08) – Estudante (E-06) – Análise da resolução
Tabela 53

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-06) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O Estudante (E-06) faz a leitura das funções do problema, descreve os elementos. Determina as condições ao descrever o modelo algébrico e geométrico para a resolução do problema. Define o objetivo de cada função destaca a maneira de solução.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis das funções$x$ e $P(x)$. Nomeia as variáveis e atribui corretamente os valores na tabela. Constrói o modelo algébrico (tabelas) e geométrico (gráfico). Faz análises das unidades e relaciona com a forma de resolução do problema.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução para encontrar os limites laterais. Soluciona o modelo atribuindo valores a variável x para encontrar as coordenadas e constrói os gráficos de cada uma das funções. Responde o que se pede: *a) a função é descontínua e não está definida no ponto a=2, pois não existe ln de 0; b) a função é descontínua e não está definida no 1º caso, no segundo caso ela está definida no ponto, apesar de se tratar de F(x) =2; c) Na primeira função será descontínua no ponto a = 0, pois está definido qualquer número elevado a zero é igual a 1. No segundo caso está definido e não há descontinuidade; (d) está definida em 1*	O	5
Interpretar a solução	O Estudante faz uma breve descrição sobre a interpretação dos resultados: (*a) a função é descontínua e não está definida no ponto a=2, pois não existe ln de 0; (b) a função é descontínua e não está definida no 1º caso, no segundo caso ela está definida no ponto, apesar de se tratar de F(x) =2; (c) Na primeira função será descontínua no ponto a = 0, pois está definido qualquer número elevado a zero é igual a 1. No segundo caso está definido e não há descontinuidade*; (d) está definida em 1.	O	5

Problema 8 (P-08) – Estudante (E-08) – Análise da resolução

Tabela 54

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-08) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-08) extrai os elementos das funções. Define os objetivos das questões, calcula corretamente o limite de três funções, sendo que a última errou ao dizer que a função é descontínua. Compõe as tabelas e constrói os gráficos.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis de todas as funções dadas. Nomeia e constrói os modelos corretamente, compondo as tabelas e construindo os gráficos de cada função.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método correto para calculara duas funções, porém para resolver as outras duas os modelos estavam incorretos. Portanto, solucionou parcialmente os modelos na forma de tabelas e gráficos. Respondeu: *a) há uma descontinuidade por não haver uma imagem para x-2; c) a solução é descontínua no ponto a=1, porque não está definida neste ponto, ou seja, não existe imagem esse número; questões b) e d) descontínua*. A questão (d) está incorreta para a definição Nesta questão o estudante compôs a tabela e construiu o gráfico corretamente, mas não soube interpretá-la quanto á continuidade.	B	4
Interpretar a solução	Extraiu os resultados do problema, porque responde corretamente três funções de quatro. Sendo que apenas uma ele não menciona se é ou não contínua, mas compõe as tabelas e gráficos. As descrições do estudante sobre cada uma das funções: *a) há uma descontinuidade por não haver uma imagem para x-2; c) a solução é descontínua no ponto a=1, porque não está definida neste ponto, ou seja, não existe imagem esse número; questões b) e d) descontínua*. A questão (d) está incorreta para a definição Nesta questão o estudante compôs a tabela e construiu o gráfico corretamente, mas não soube interpretá-la quanto á continuidade.	B	4

Problema 8 (P-08) – Estudante (E-11) – Análise da resolução
Tabela 55

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-11) – PROBLEMA (P-08)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos das quatro funções dadas no problema. Determina as condições ao esboçar o modelo gráfico e compor as tabelas para cada função.. Define os objetivos para solução.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis das quatro funções. Nomeia corretamente as variáveis. Constrói corretamente os modelos matemáticos para a solução do problema, compõe as tabelas e constrói os gráficos para cada função.	O	5
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método para resolver, mas resolve os modelos, compõe as tabelas e gráficos de cada função corretamente. Responde sobre a continuidade das funções: *(a) há uma descontinuidade, por não haver imagem x=2; (b) é descontínua em 1 porque não existe imagem para esse número; (c) [não mencionou]; (d) quando x≠1 há uma descontinuidade, quando x=1 há uma continuidade.*	B	4
Interpretar a solução	Respostas do estudante sobre a continuidade das funções: *(a) há uma descontinuidade, por não haver imagem x=2; (b) é descontínua em 1 porque não existe imagem para esse número; (c) [não mencionou]; (d) quando x≠1 há uma descontinuidade, quando x=1 há uma continuidade*.	B	4

A seguir apresentamos nas Tabelas 56 a 61 a análise das respostas dos estudantes ao problema 9 (P-09)

Problema 9 – Estudante (E-01) – Análise da resolução
Tabela 56

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-01) - PROBLEMA 9 (P-09)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O Estudante (E-01) extrai os elementos necessários para aplicação dos valores nas vizinhanças do número indicador do limite. Define por tentativa de ensaio e erro, pois a forma algébrica desenvolvida atribui para x valores muito próximos de 100 para visualizar o comportamento da função.	I	2

Construir o modelo matemático	Identifica as variáveis e incógnitas do problema, nominando em representação algébrica. Nomeia as variáveis do problema. Constrói parcialmente, pois se observou que o estudante não compreendeu o problema: Não realizou a análise das medidas, pois não usou o intervalo dado, de modo que não atribuiu valores adequados para a variável x.	I	2
Solucionar o modelo matemático	Faz uso parcial do método de substituição de valores para x muito próximos do valor de 100, até a segunda casa decimal. Não soluciona o modelo dado no problema, pois não compreendeu o problema e não utilizou as variáveis adequadas, atribuem os seguintes valores: (99,95 e 99,99) para x, encontrando os valores de S(x) (1599,2 e 7999,2).	I	2
Interpretar a solução	Extrai parcialmente os elementos relativos ao problema para encontrar a solução. Sua resposta não responde ao objetivo do problema. O relatório realizado pelo Estudante é insuficiente e incorreto para demonstrar compreensão: "Quando pegamos valores de x mais próximos de 100 pela esquerda, percebe-se que f(x) cresce infinitamente".	I	2

Problema 9 – Estudante (E-02) – Análise da resolução

Tabela 57

ANÁLISE DO PROBLEMA (P-09) DO ESTUDANTE (E-02) - AVALIAÇÃO FINAL			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	Extrai os elementos e destaca o modelo da função. Ao organizar os dados para resolver, esboça que determina as condições do problema. Ao iniciar a resolução do problema destaca-se a função com um ponto de interrogação S(x) = ?.	O	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas, definindo que S(x), x, y, demonstrando algebricamente. Nomeia as variáveis e incógnitas: identifica a função. Não se aplica o modelo já foi dado no problema, mas organiza dos dados problemas na forma algébrica. Faz relação das variáveis do modelo matemático com a solução do problema. $S(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}$ $\lim_{x \to 100^-} S(x) = ?$ $\lim_{x \to 100^-} S(x) = 80$	**O**	**5**
Solucionar o modelo	Encontra o método de solução, através da compondo uma tabela e atribuindo valores para x no intervalo de	O	5

matemático	10 até 99. Observando o desenvolvido dos cálculos o estudante solucionou o modelo matemático e apresenta o resultado. $\begin{array}{cl} x & y \\ \hline 10 & 0{,}0888 \\ 50 & 0{,}8 \\ 90 & 7{,}2 \\ 99 & 79{,}2 \\ 1 & 0{,}00808 \end{array}$ $\boxed{\lim_{x \to 100^-} S(x) = 80}$		
Interpretar a solução	Extrai o modelo do problema e faz relação com o limite que precisa encontrar. Responde ao problema destacando os procedimentos algebricamente. No final da questão o estudante descreve o seguinte texto: "*Destacando o intervalo que determina a função da porcentagem do custo. Quanto mais distante de 100 pela esquerda, menor o custo”*. No entanto, o valor máximo é de 80%.	**O**	**5**

Problema 9 – Estudante (E-04) – Análise da resolução

Tabela 58

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-04) - PROBLEMA (P-09)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	O estudante (E-04) faz a leitura, destaca as funções e as variáveis. Determina as condições, compreende totalmente o problema. Define parcialmente o objetivo, fez os cálculos, mas não interpretou satisfatoriamente.	R	3
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente o modelo, destacou somente as incógnitas e não atribuiu valores para as variáveis, para obter dados substanciáveis. Não determina, pois não atribuiu valores para variáveis. Constrói parcialmente, pois o modelo encontrado pelo estudante é insuficiente para encontrar o resultado. A análise do não satisfaz ao objetivo do problema.	R	3
Solucionar o modelo matemático	O método encontrado pelo estudante está incompleto. Soluciona parcialmente o modelo, pois o resultado está parcialmente correto.	R	3
Interpretar a solução	Extrai parcialmente o resultado, faltando considerar o intervalo. Não responde satisfatoriamente ao objetivo. De acordo com a interpretação do Estudante: "*O limite é 80 e está tendendo por valores negativos*", o que não está correto. *"E o limite do denominador está tendendo a zero por valores negativos"*. Continuando ainda *“o custo percentual de remoção do lixo tóxico, próximo dos 100%, está indo pra mais infinito e não está definido”.* A	R	3

	resposta está incorreta porque o limite neste caso é 80%.		

Problema 9 – Estudante (E-06) – Análise da resolução
Tabela 59

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-06) - PROBLEMA (P-09)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	Extrai parcialmente, pois não considera o intervalo dado. Como também determina parcialmente as condições e o objetivo, pois não fez todas as relações.	I	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera os valores do intervalo dado no problema. Constrói o modelo de maneira insuficiente para resolver o problema, tornando-se inviável realizar análise, no entanto, fez, mas não satisfaz ao objetivo do problema.	I	2
Solucionar o modelo matemático	Encontra parcialmente o método, pois não avalia o intervalo a ser usado. Logo, soluciona o modelo incorretamente.	I	2
Interpretar a solução	Não extrai todos os resultados significativos e relativos ao problema. O estudante descreve que *"o limite da função quando x tende a 100 pela esquerda, os limites laterais serão diferentes",* ou seja, a resposta descrita não satisfaz ao objetivo do problema.	I	2

Problema 9 – Estudante (E-08) – Análise da resolução
Tabela 60

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-08) - PROBLEMA (P-09)			
CATEGORIAS	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	Faz a leitura, mas extrai parcialmente os elementos. Determina também parcialmente as condições, não faz relação com os valores do intervalo. Define parcialmente o objetivo, pois não considera todos os elementos para resolver o problema.	I	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera o intervalo dado. Nomeia as variáveis, mas não relaciona com o intervalo estipulado no problema. O Estudante constrói parcialmente o	I	2

	modelo, apesar de organizar os dados em forma de tabela, o Estudante não atribui corretamente as variáveis.		
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método de aplicação algébrica composta em tabela e faz uma tentativa de esboçar o gráfico. Soluciona de forma incompleta o modelo, pois, atribui variáveis incorretas para encontrar o resultado.	I	2
Interpretar a solução	Os elementos extraídos são insuficientes para atender o objetivo do problema. A resposta dada pelo estudante é incompleta e não satisfaz ao objetivo do problema.	I	1

Problema 9 – Estudante (E-11) – Análise da resolução
Tabela 61

AVALIAÇÃO FINAL DO ESTUDANTE (E-11) - PROBLEMA (P-09)			
CATEGORIA	**ANÁLISE DESCRITIVA**	**CONCEITO**	**PONTOS**
Compreender o problema	A aluna lê e extrai parcialmente os elementos, o que não é suficiente para resolver corretamente. Determina parcialmente.	I	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, nomeia parcialmente Constrói parcialmente o modelo. Não faz a análises das unidades, por não considerar o intervalo dado no problema para identificar o limite percentual.	I	2
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método, mas por não considerar o intervalo, faz os cálculos incorretos. Sua soluciona não satisfaz ao objetivo do problema.	I	2
Interpretar a solução	Não extrai os resultados significativos do problema. Não responde o problema. Quanto à descrição do Estudante: "quando pegamos pontos mais próximos de 100 pela esquerda, percebe-se que f(x) cresce infinitamente". Esta afirmação está incompleta, pois não atende totalmente ao objetivo da solução do problema.	I	2

A seguir apresentamos somente as Tabelas 62 a 67 da síntese do desempenho de cada estudante que participou da avaliação final do conteúdo de limite.

TABELA 62 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-01) AVALIAÇÃO FINAL

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

Caraterísticas Gerais

- Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

TABELA 63 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-02) AVALIAÇÃO FINAL

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	5	5	5	5	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

Caraterísticas Gerais

- Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

TABELA 64 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-04) AVALIAÇÃO FINAL

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	3	3	3	3	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

Caraterísticas Gerais

- Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.

Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.

TABELA 65 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-06) AVALIAÇÃO FINAL

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.
Caraterísticas Gerais • Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.					
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

TABELA 66 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-08) AVALIAÇÃO FINAL

P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.
Caraterísticas Gerais • Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.					
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

TABELA 67 – SÍNTESE DO DESEMPENHO DO ESTUDANTE (E-11) AVALIAÇÃO FINAL

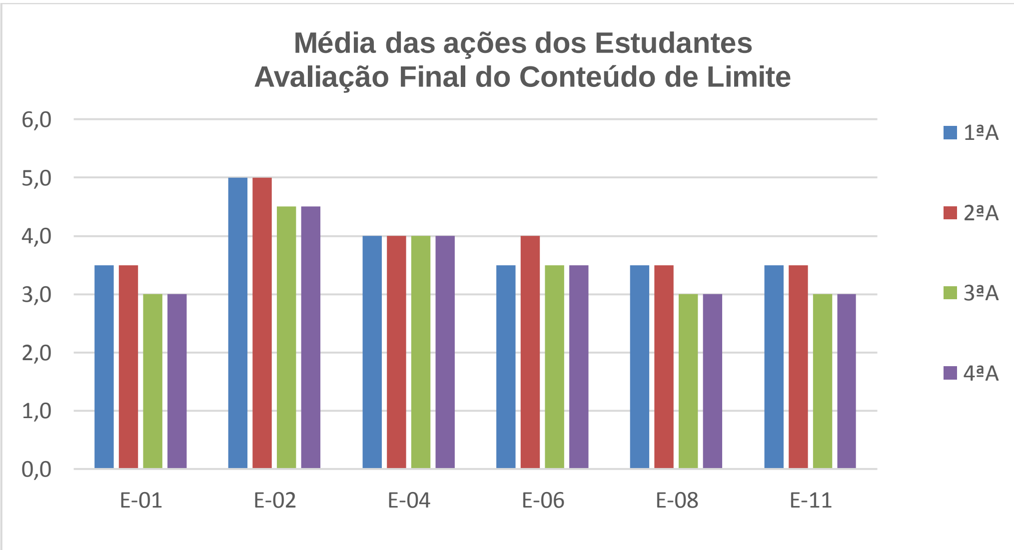
P	1ª A	2ª A	3ª A	4ª A	Contexto do problema
nº 8	5	5	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.
Caraterísticas Gerais • Conteúdos relacionados: Continuidade e Limites Infinitos.					
Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução.					

Apresentamos a tabela 68 com o resultado geral do desempenho dos estudantes e o gráfico da média das ações da avaliação final.

Tabela 67

AVALIAÇÃO FINAL														
	P08					**P09**				**MEDIA**				
	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA	**T**	1ªA	2ªA	3ªA	4ªA
E-01	5	5	4	4	**19**	2	2	2	2	**18**	3,5	3,5	3,5	3,0
E-02	5	5	4	4	**20**	5	5	5	5	**20**	5,0	5,0	4,5	4,5
E-04	5	5	5	5	**19**	3	3	3	3	**20**	4,0	4,0	4,0	4,0
E-06	5	5	5	5	**20**	2	2	2	2	**11**	3,5	4,0	4,5	3,5
E-08	5	5	4	4	**12**	2	2	2	2	**7**	3,5	3,5	3,0	3,0
E-11	5	5	4	4	**11**	2	2	2	2	**11**	3,5	3,5	3,0	3,0

Gráfico 7



Aqui concluímos a análise dos dados das provas de lápis e papel dos estudantes da disciplina de Cálculo I, na unidade de Limite, do curso de licenciatura do Instituto Federal de Roraima – IFRR.